

6.1.1 复数的有关概念

【学情分析】

初中时，数的概念已经扩充到实数，学生清楚各种数集之间的包含关系等内容，但是知识是零碎的、分散的，学生对数的发展历史和规律缺乏整体认识与理性思考，知识体系还未形成。此外，学生对方程解的问题会默认为在实数集中进行，缺乏严谨的思维习惯。

【教学目标】

- (1) 能举例说明复数，复数的实部、虚部的概念，能区分复数、实数、虚数、纯虚数。
- (2) 知道复数相等的充要条件。
- (3) 提升数学运算、逻辑推理等核心素养。

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是复数的概念及代数表示、复数相等的充要条件等，教学难点是复数的概念及对虚数单位 i 的理解。

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
导入	<p>很久以前，人们认为一元二次方程 $x^2 + 1 = 0$ 是无解的。但是，随着对数系的深入研究，人们逐渐意识到应该存在一个数，它就是该方程的解。</p> <p>依照引入负数，使方程 $x + 4 = 3$ 有解的方法，是否可以引入一个数使方程 $x^2 + 1 = 0$ 有解呢？</p>	从解方程入手对数系进行扩充。
新课	<p>假设有一个数是方程 $x^2 + 1 = 0$ 的解，那么这个数的平方应该等于 -1。这个数不在实数集中。为此，人们引入了一个新的数，记作 i，称为虚数单位。</p> <p>既然 i 是一个数，那么它与实数就可以进行运算。实数 b 与 i 的乘积写成 bi，实数 a 与 bi 的和写成 $a+bi$。</p> <p>把形如 $a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的数称为复数，其中 a 称为复数的实部，b 称为复数的虚部。</p> <p>当 $b=0$ 时，复数 $a+bi$ 就是实数。</p> <p>当 $b \neq 0$ 时，复数 $a+bi$ 称为虚数。</p>	从复数的代数形式引出对复数的有关概念的讲授。

	<p>当 $a=0$ 且 $b \neq 0$ 时, 复数 $a+bi$ 称为纯虚数.</p> <p>复数通常用小写英文字母 z 表示, 如 $z=a+bi$. 所有复数组成的集合称为复数集, 复数集通常用大写字母 \mathbf{C} 表示, 即</p> $\mathbf{C}=\{z z=a+bi, a, b \in \mathbf{R}\}.$ <p>所有虚数构成的集合称为虚数集, 所有纯虚数构成的集合称为纯虚数集, 它们与实数集、复数集之间有怎样的关系?</p> <p>复数集、实数集、虚数集、纯虚数集之间的关系可以用下图表示.</p>	
	<p>【例 1】</p> <p>分别求实数 x 的取值, 使复数 $z = (x - 2) + (x + 3)i$</p> <p>(1) 是实数; (2) 是虚数; (3) 是纯虚数.</p> <p>分析: 因为 x 是实数, 所以 z 的实部是 $x - 2$, 虚部是 $x + 3$. 然后由复数 $z = a + bi$ 是实数、虚数与纯虚数的条件可以确定 x 的值.</p> <p>解: (1) 当 $x + 3 = 0$, 即 $x = -3$ 时, 复数 z 是实数.</p> <p>(2) 当 $x + 3 \neq 0$, 即 $x \neq -3$ 时, 复数 z 是虚数.</p> <p>(3) 当 $x - 2 = 0$ 且 $x + 3 \neq 0$, 即 $x = 2$ 时, 复数 z 是纯虚数.</p>	应用和巩固复数有关概念.
	<p>如果两个复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的实部与虚部分别相等, 就称这两个复数相等, 记作</p> $a+bi=c+di.$ <p>即, 如果 a, b, c, d 都是实数, 那么</p> $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d.$ <p>特别地, 当 a, b 都是实数时, $a+bi=0 \Leftrightarrow a=0$ 且 $b=0$.</p> <p>从两个复数相等的定义可知, 复数 $a+bi$ 与有序实数对 (a, b) 之间是一一对应的.</p>	讲解重要概念, 说明特殊情况.
	<p>【例 2】 求满足下列关系的实数 x 和 y 的值:</p> <p>(1) $(x + 2y) - i = 6x + (x - y)i$;</p>	巩固复数相等的定义.

	<p>(2) $(x + y + 1) - (x - y + 2)i = 0$.</p> <p>解: (1) 根据复数相等的定义, 得方程组</p> $\begin{cases} x + 2y = 6x, \\ -1 = x - y. \end{cases}$ <p>解这个方程组, 得</p> $\begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ y = \frac{5}{3}. \end{cases}$ <p>(2) 由复数等于零的充要条件, 得</p> $\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ -(x - y + 2) = 0. \end{cases}$ <p>解这个方程组, 得</p> $\begin{cases} x = -\frac{3}{2}, \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$	
	<p>1. 说出下列各数中, 哪些是实数, 哪些是虚数, 哪些是复数:</p> $2 + \sqrt{2}, \quad 0.618, \quad 3i, \quad 0, \quad i, \quad i^2, \quad 5 + 2i,$ $3 - \sqrt{2}i, \quad (1 + \sqrt{3})i, \quad 2 + \sqrt{2}i.$ <p>2. 写出下列各复数的实部和虚部:</p> $-3 + 2i, \quad 3 + 7i, \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -8, \quad -6i.$ <p>3. 求满足下列关系的实数x和y的值:</p> <p>(1) $(x - 2y) + (2x + 3y)i = 3 - 3i$;</p> <p>(2) $(3x + y + 3) = (x - y - 3)i$;</p> <p>(3) $(x + y - 3) + (x - y - 1)i = 0$.</p> <p>4. 试用集合包含符号表示复数集 C、实数集 R、有理数集 Q 和整数集 Z 之间的关系.</p>	<p>及时掌握学生学习情况, 查漏补缺.</p>
小结	<p>引导学生小结.</p> <p>(1) 实部、虚部的概念.</p> <p>(2) 实数、虚数、纯虚数的概念.</p> <p>(3) 复数相等的充要条件.</p>	<p>回顾学习的过程, 总结本节课的收获.</p>

