

### 6.1.1 复数的有关概念

#### 【学情分析】

初中时，数的概念已经扩充到实数，学生清楚各种数集之间的包含关系等内容，但是知识是零碎的、分散的，学生对数的发展历史和规律缺乏整体认识与理性思考，知识体系还未形成。此外，学生对方程解的问题会默认为在实数集中进行，缺乏严谨的思维习惯。

#### 【教学目标】

- (1) 能举例说明复数，复数的实部、虚部的概念，能区分复数、实数、虚数、纯虚数。
- (2) 知道复数相等的充要条件。
- (3) 提升数学运算、逻辑推理等核心素养。

#### 【教学重点和难点】

本节课的教学重点是复数的概念及代数表示、复数相等的充要条件等，教学难点是复数的概念及对虚数单位  $i$  的理解。

#### 【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
导入	<p>很久以前，人们认为一元二次方程<math>x^2 + 1 = 0</math>是无解的。但是，随着对数系的深入研究，人们逐渐意识到应该存在一个数，它就是该方程的解。</p> <p>依照引入负数，使方程<math>x + 4 = 3</math>有解的方法，是否可以引入一个数使方程<math>x^2 + 1 = 0</math>有解呢？</p>	从解方程入手对数系进行扩充。
新课	<p>假设有一个数是方程<math>x^2 + 1 = 0</math>的解，那么这个数的平方应该等于<math>-1</math>。这个数不在实数集内。为此，人们引入了一个新的数，记作 <math>i</math>，称为<b>虚数单位</b>。</p> <p>既然 <math>i</math> 是一个数，那么它与实数就可以进行运算。实数 <math>b</math> 与 <math>i</math> 的乘积写成 <math>bi</math>，实数 <math>a</math> 与 <math>bi</math> 的和写成 <math>a+bi</math>。</p> <p>把形如 <math>a+bi</math> (<math>a, b \in \mathbf{R}</math>) 的数称为<b>复数</b>，其中 <math>a</math> 称为复数的<b>实部</b>，<math>b</math> 称为复数的<b>虚部</b>。</p> <p>当 <math>b=0</math> 时，复数 <math>a+bi</math> 就是<b>实数</b>。</p> <p>当 <math>b \neq 0</math> 时，复数 <math>a+bi</math> 称为<b>虚数</b>。</p>	从复数的代数形式引出对复数的有关概念的讲授。

	<p>当 <math>a=0</math> 且 <math>b \neq 0</math> 时, 复数 <math>a+bi</math> 称为<b>纯虚数</b>.</p> <p>复数通常用小写英文字母 <math>z</math> 表示, 如 <math>z=a+bi</math>. 所有复数组成的集合称为<b>复数集</b>, 复数集通常用大写字母 <math>C</math> 表示, 即</p> $C=\{z z=a+bi, a, b \in R\}.$ <p>所有虚数构成的集合称为虚数集, 所有纯虚数构成的集合称为纯虚数集, 它们与实数集、复数集之间有怎样的关系?</p> <p>复数集、实数集、虚数集、纯虚数集之间的关系可以用下图表示.</p> <div data-bbox="651 645 944 860" data-label="Diagram"> </div>	
	<p><b>【例 1】</b></p> <p>分别求实数 <math>x</math> 的取值, 使复数 <math>z = (x - 2) + (x + 3)i</math></p> <p>(1) 是实数;      (2) 是虚数;      (3) 是纯虚数.</p> <p><b>分析:</b> 因为 <math>x</math> 是实数, 所以 <math>z</math> 的实部是 <math>x - 2</math>, 虚部是 <math>x + 3</math>. 然后由复数 <math>z = a + bi</math> 是实数、虚数与纯虚数的条件可以确定 <math>x</math> 的值.</p> <p><b>解:</b> (1) 当 <math>x + 3 = 0</math>, 即 <math>x = -3</math> 时, 复数 <math>z</math> 是实数.</p> <p>(2) 当 <math>x + 3 \neq 0</math>, 即 <math>x \neq -3</math> 时, 复数 <math>z</math> 是虚数.</p> <p>(3) 当 <math>x - 2 = 0</math> 且 <math>x + 3 \neq 0</math>, 即 <math>x = 2</math> 时, 复数 <math>z</math> 是纯虚数.</p>	<p>应用和巩固复数有关概念.</p>
	<p>如果两个复数 <math>a+bi</math> 与 <math>c+di</math> 的实部与虚部分别相等, 就称这两个复数相等, 记作</p> $a+bi=c+di.$ <p>即, 如果 <math>a, b, c, d</math> 都是实数, 那么</p> $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \text{ 且 } b=d.$ <p>特别地, 当 <math>a, b</math> 都是实数时, <math>a+bi=0 \Leftrightarrow a=0</math> 且 <math>b=0</math>.</p> <p>从两个复数相等的定义可知, 复数 <math>a+bi</math> 与有序实数对 <math>(a, b)</math> 之间是一一对应的.</p>	<p>讲解重要概念, 说明特殊情况.</p>
	<p><b>【例 2】</b> 求满足下列关系的实数 <math>x</math> 和 <math>y</math> 的值:</p> <p>(1) <math>(x + 2y) - i = 6x + (x - y)i</math>;</p>	<p>巩固复数相等的定义.</p>

	<p>(2) <math>(x + y + 1) - (x - y + 2)i = 0</math>.</p> <p><b>解:</b> (1) 根据复数相等的定义, 得方程组</p> $\begin{cases} x + 2y = 6x, \\ -1 = x - y. \end{cases}$ <p>解这个方程组, 得</p> $\begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ y = \frac{5}{3}. \end{cases}$ <p>(2) 由复数等于零的充要条件, 得</p> $\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ -(x - y + 2) = 0. \end{cases}$ <p>解这个方程组, 得</p> $\begin{cases} x = -\frac{3}{2}, \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$	
	<p>1. 说出下列各数中, 哪些是实数, 哪些是虚数, 哪些是复数:</p> $2 + \sqrt{2}, 0.618, 3i, 0, i, i^2, 5 + 2i,$ $3 - \sqrt{2}i, (1 + \sqrt{3})i, 2 + \sqrt{2}i.$ <p>2. 写出下列各复数的实部和虚部:</p> $-3 + 2i, 3 + 7i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -8, -6i.$ <p>3. 求满足下列关系的实数<math>x</math>和<math>y</math>的值:</p> <p>(1) <math>(x - 2y) + (2x + 3y)i = 3 - 3i</math>;</p> <p>(2) <math>(3x + y + 3) = (x - y - 3)i</math>;</p> <p>(3) <math>(x + y - 3) + (x - y - 1)i = 0</math>.</p> <p>4. 试用集合包含符号表示复数集 <b>C</b>、实数集 <b>R</b>、有理数集 <b>Q</b> 和整数集 <b>Z</b> 之间的关系.</p>	<p>及时掌握学生学习情况, 查漏补缺.</p>
小结	<p>引导学生小结.</p> <p>(1) 实部、虚部的概念.</p> <p>(2) 实数、虚数、纯虚数的概念.</p> <p>(3) 复数相等的充要条件.</p>	<p>回顾学习的过程, 总结本节课的收获.</p>

