6.2　复数的运算

【学情分析】

学生已经学习了复数的概念与定义，以及复数在数域内的地位. 通过复数与复平面内的点的一一对应，了解了复数的几何意义，知道复数的模、共轭复数的概念. 学生计算能力较强，善于直接套用公式解题，但独立思考、解决问题的能力较弱. 学生自我意识较强，大部分学生有积极向上的态度，有较强的求知欲望，但自制力不足，缺乏克服困难、迎难以上的品质.

【教学目标】

（1）通过实数的运算法则研究复数的运算，会进行复数代数形式的加法、减法及乘法运算.

（2）根据复数与平面向量的对应关系推导复数加法与减法的几何意义，给学生渗透转化、数形结合的数学思想和方法.

（3）通过探索与类比推理学习，提高学生分析问题、解决问题的能力，培养学生独立思考、交流合作的品质.

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是复数的加法、减法及乘法运算，教学难点是复数的加法与减法的几何意义.

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	1．什么是虚数单位？虚数单位有什么性质？ 2．如果 a ，b 都是实数，$a+b\mathrm{i}$ 在什么情况下是实数？在什么情况下是纯虚数？ 3．两个复数在什么情况下是相等的？两个复数能否比较大小？ 4．什么是共轭复数？ 5．复数的几何意义是什么？	以提问的方式引导学生回顾复数的相关概念，巩固所学知识.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">新课</td>
<td>

【探究 1】

设 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=2-2\mathrm{i}$，$z_3=-2+3\mathrm{i}$，你认为 z_1+z_2 与 $(z_1+z_2)+z_3$ 的值应该等于多少？由此尝试给出任意两个复数相加的运算规则．

一般地，设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），称 z_1+z_2 为 z_1 与 z_2 的和，并规定

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})\\&=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

例如，设 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=2-2\mathrm{i}$，$z_3=-2+3\mathrm{i}$，求 z_1+z_2 与 $(z_1+z_2)+z_3$ 的值．

解：$z_1+z_2=(1+\mathrm{i})+(2-2\mathrm{i})=(1+2)+(1-2)\mathrm{i}=3-\mathrm{i}$，

$(z_1+z_2)+z_3=(3-\mathrm{i})+(-2+3\mathrm{i})=1+2\mathrm{i}$．

显然，两个复数的和仍然是复数．复数的加法运算满足交换律与结合律，即

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$

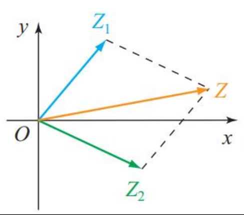
$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

</td>
<td>探究复数加法运算，归纳加法运算法则，即实部与实部相加，虚部与虚部相加．</td>
</tr>
<tr>
<td>

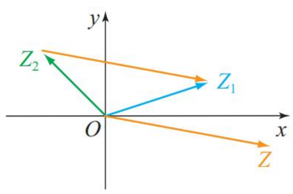
【探究 2】

设 $z_1=2+2\mathrm{i}$，$z_2=-1-4\mathrm{i}$，求出 z_1+z_2，并在复平面内分别作出 z_1，z_2，z_1+z_2 所对应的向量，猜想并归纳复数加法的几何意义．

由复数与向量之间的对应关系可以得出复数加法的几何意义：如果复数 z_1，z_2 所对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$，则当 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 不共线时，以 OZ_1 和 OZ_2 为两条邻边作平行四边形 OZ_1ZZ_2，则



</td>
<td>数形结合，了解复数加法的几何意义．</td>
</tr>
</table>

	z_1+z_2 所对应的向量就是 $\overrightarrow{OZ}$，如图所示.	
	【探究 3】 设 $z_1=5+8\mathrm{i}$，$z_2=5-3\mathrm{i}$，猜测 z_2 的相反数以及 z_1-z_2 的值. 一般地，复数 $z=a+b\mathrm{i}$（a，$b\in\mathbf{R}$）的相反数记作 $-z$，并规定 $$-z=-(a+b\mathrm{i})=-a-b\mathrm{i}.$$ 复数 z_1 减去 z_2 的差记作 z_1-z_2，并规定 $$z_1-z_2=z_1+(-z_2).$$ 例如，设 $z_1=5+8\mathrm{i}$，$z_2=5-3\mathrm{i}$，求 z_2 的相反数以及 z_1-z_2 的值. **解：** z_2 的相反数为 $-z_2=-(5-3\mathrm{i})=-5+3\mathrm{i}$， $$z_1-z_2=(5+8i)+(-5+3i)=11i..$$ 显然，两个复数的差仍然是复数．但两个复数的差一般不满足交换律，即一般来说，$z_1-z_2\neq z_2-z_1$. 由复数与向量之间的对应关系同样可以得出复数减法的几何意义：如果复数 z_1，z_2 所对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$，设点 Z 满足 $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{Z_2Z_1}$，则 z_1-z_2 所对应的向量就是 $\overrightarrow{OZ}$，如图所示.  	用类比的方法探究复数减法运算，了解复数相反数的表示方法，归纳减法运算法则，即实部与实部相减，虚部与虚部相减. 数形结合，了解复数减法的几何意义.
	【探究 4】 设 $z_1=3$，$z_2=1-2\mathrm{i}$，$z_3=-5\mathrm{i}$，你认为 z_1z_2 与 z_2z_3 的值分别等于多少？由此尝试给出任意两个复数相乘的运算规则. 一般地，设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），称	探索复数乘法运算，归纳乘法运算法则，即按照多项式乘法的方

	z_1z_2 为 z_1 与 z_2 的积，并规定 $$\begin{aligned} z_1z_2 &= (a+bi)(c+di) \\ &= ac+adi+bci+bdi^2 \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i. \end{aligned}$$ 这就是说，为了算出两个复数的积，只需要按照多项式乘法的方式进行，并利用 $i^2=-1$ 即可. 例如，设 $z_1=3$，$z_2=1-2i$，$z_3=-5i$，求 z_1z_2 与 z_2z_3 的值. **解：** $z_1z_2=3(1-2i)=3-6i$， $z_2z_3=(1-2i)(-5i)=-10-5i$. 显然，两个复数的积仍然是复数. 复数的乘法运算满足交换律与结合律，且对加法满足分配律，即 $z_1z_2=z_2z_1$，$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$，$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.	法运算.
	例 1 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，求证： $$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$ **证明：** $(a+bi)(a-bi)=a^2-abi+bai-b^2i^2$ $=a^2+b^2$. **例 2** 计算 $(1+i)^2$ 与 $(1-i)^2$ 的值. **解：** $(1+i)^2=1^2+2i+i^2=2i$. $(1-i)^2=1^2-2i+i^2=-2i$.	知识应用.
	计算： （1）$(1+2i)+(2i-1)$；　（2）$(3-2i)+(-3+4i)$； （3）$(3-5i)-(4-3i)$；　（4）$(1+2i)(2i-3)$； （5）$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)$；　（6）$(2-i)^3$.	强化训练.
小结	引导学生小结.	回顾学习的

	（1）复数的加法、减法及乘法运算. （2）复数的加法与减法的几何意义.	过程，总结本节课的收获.