6.3　复数的应用

【学情分析】

学生在初中阶段学习了在实数集中求解一元二次方程的方法，在前面又学习了复数的概念与运算，因此可以根据数系的扩展，对学生的知识体系进行顺应性建构，从实数集的解到复数集的解. 从学科核心素养来看，学生具备一定的数学运算、直观想象、逻辑推理等素养. 由于学生已经学习过一元二次方程在实数范围的解，因此教学时可采用温故知新、多示范、多练习的教学方式，逐步提升学生的数学运算、直观想象、逻辑推理等素养.

【教学目标】

（1）学会求复数范围内实系数一元二次方程的两个根，并能说出这两个根是共轭复数.

（2）类比一元二次方程的解法，探究在复数范围内实系数一元二次方程的解法，提高学生观察、分析、概括、迁移的能力，增强应用数学知识解决问题的意识.

（3）通过合作探究，增强学生主动沟通和团队协作的意识.

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是在复数集中解实系数一元二次方程，教学难点是实系数一元二次方程的根与系数的关系的应用.

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	1．一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a，b，c\in\mathbf{R}$且$a\neq 0)$ 的求根公式： （1）$\Delta=b^2-4ac>0$，方程有两个不相等的实数根 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$； （2）$\Delta=b^2-4ac=0$，方程有两个相等的实数根 $x=-\dfrac{b}{2a}$；	复习实数集中一元二次方程的解的情况，为学生学习新课打下基础.

<table>
<tr><td></td><td>（3）$\Delta = b^2 - 4ac < 0$，方程没有实数根．
2．根与系数的关系：
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$，$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$．</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">新课</td><td>【问题 1】
我们知道，$\mathrm{i}^2 = -1$，$(-\mathrm{i})^2 = -1$，所以方程 $x^2 = -1$ 的解是 $x = \mathrm{i}$ 或 $x = -\mathrm{i}$．那么方程 $x^2 = -5$ 的解是什么？
对于一般的一元二次方程，在复数范围的解是什么？
一般地，当 a，b，$c \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$ 时，关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 称为实系数一元二次方程，这个方程在复数范围内总是有解的，记
$$\Delta = b^2 - 4ac,$$
称它为方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根的判别式．
当 $\Delta \geq 0$ 时，方程在实数集 $\mathbf{R}$ 中有解
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
当 $\Delta < 0$ 时，方程在实数集 $\mathbf{R}$ 中无解，但在复数集 $\mathbf{C}$ 中有解
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\,\mathrm{i}}{2a},$$
显然，这两个根是一对共轭复数．</td><td>通过具体问题，激发学生学习数学的兴趣，提高学生归纳总结的能力．</td></tr>
<tr><td>【问题 2】
实系数一元二次方程的根与系数的关系，在 $\Delta < 0$ 的时候是否也成立？
设这两个互为共轭的虚数根分别为 x_1, x_2，有
$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}\,\mathrm{i}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{-\Delta}\,\mathrm{i}}{2a} = -\frac{b}{a},$$</td><td>从在实数集范围内求解到在复数集中求解，培养学生的知识迁移能</td></tr>
</table>

	$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{-\Delta}\,\mathrm{i}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{-\Delta}\,\mathrm{i}}{2a}=\frac{c}{a}.$$ **结论**：实系数一元二次方程的根与系数的关系，在$\Delta<0$的时候也成立.	力.
	【例 1】 在复数集 **C** 中，解方程$x^2-4x+5=0$. **解**：因为$b^2-4ac=16-20=-4<0,$所以 $$x_1=\frac{4+\sqrt{4}\,\mathrm{i}}{2}=2+\mathrm{i},x_2=\frac{4-\sqrt{4}\,\mathrm{i}}{2}=2-\mathrm{i}.$$	熟悉求解方程的过程，提升学生的数学运算素养.
	【例 2】 已知实系数一元二次方程$x^2+mx+n=0$的一个根是$1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，求它的另一个根及m,n. **解**：因为当$\Delta<0$时，实系数一元二次方程在复数集 **C** 中的两个根是共轭复数，所以原方程的另一个根是$1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$. 由根与系数的关系可得 $$m=-(x_1+x_2)=-[(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})+(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})]=-2,$$ $$n=x_1x_2=(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})=1-(\sqrt{3}\,\mathrm{i})^2=4.$$	巩固复数集 **C** 中的两根关系、根与系数关系，提升学生的逻辑推理素养.
	【例 3】 在复数集 **C** 中，解方程$x^3-1=0$. **解**：因为$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0,$所以 $$x-1=0\text{或}x^2+x+1=0,$$ 解得$x_1=1,x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}.$ 所以原方程的解为 $$x_1=1,x_2=\frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2},x_3=\frac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}.$$	巩固因式分解与一元二次方程解法，提高学生综合应用知识的能力.
	【练习 1】 在复数范围内解下列方程：	

	（1）$x^2=-9$；（2）$4x^2+35=10$； （3）$x^2+2x+10=0$；（4）$2(x^2+4)=-x$. **【练习 2】** 已知实系数一元二次方程$x^2+bx+c=0$的一个根是$3-4\mathrm{i}$，求另一个根和b,c.	应用新知解决问题，巩固对知识的理解，提升学生的数学运算和逻辑推理素养.
小结	引导学生小结. （1）实系数一元二次方程的解的情况. （2）一元二次方程的根与系数的关系.	回顾学习的过程，总结本节课的收获.