7.2.1　排列（第 2 课时）

【学情分析】

学生在上一课时学习了排列的基本概念，初步了解了用分步计数原理求解简单的排列问题的方法．在此基础上，可以对学生的知识体系进行顺应性建构，通过对生活问题的数学建模引入排列数的概念，对具体问题进行排列数的计算，拓展到一般排列数的计算方法．学生具备一定的数学运算、逻辑推理、数学建模等素养，但逻辑推理、数学抽象是学生的薄弱环节．教师教学时，应注意低起点、慢慢来、多示范、多练习，逐步提升学生的各方面能力．

【教学目标】

（1）通过创设问题情境了解排列数的概念和符号，让学生从对生活问题中关于排列数的计算活动，类比迁移到进行一般排列数的计算推导，理解排列数公式的由来，并会进行简单排列数的计算（包括全排列数的计算）．

（2）通过对排列数公式的推导，提升学生数学运算、逻辑推理、数学抽象、数学建模等素养．

（3）结合生活实例，让学生感受数学来源于生活，运用于生活．通过解决问题，培养学生独立思考、交流合作的品质．

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是排列数公式的推导和应用，教学难点是排列数公式的推导和对排列数符号的理解与应用．

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	**【问题情境】** 从 10 名集训的乒乓球运动员中，任选 3 名运动员，并排好出场的先后次序参加比赛，有多少种参赛方法? 从 10 名运动员中选 3 名，排好出场先后次序去参加比赛，求有多少种参赛方法，事实上就是从 10 个不同的元素中取出 3 个元素的所有排列．	回顾上一节课的问题，对具体问题进行数学建模，让学生复习排列的概念．

<table>
<tr>
<td rowspan="2">新课</td>
<td>

【导入概念】

一般地，从 n 个不同元素中取出 m（$m\leqslant n$）个元素的所有排列的个数，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**排列数**，用符号 A_n^m 表示（A 是排列的英文 arrangement 的第一个字母的大写）.

如前面“问题情境”中的排列数就可用 A_{10}^3 表示.

</td>
<td>通过问题创设情境，导入排列数的概念和符号.</td>
</tr>
<tr>
<td>

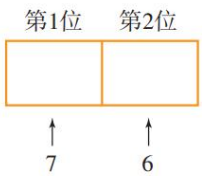
【问题 1】

试求排列数 A_7^2 和 A_7^3 .

学生通过小组合作学习，进行探究.

求排列数 A_7^2 可以这样考虑：假定有排列顺序的两个空位（如图），从不同的 7 个元素 a_1，a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7 中任取两个去填空，1 个空位填 1 个元素，每一种填法就得到 1 个排列；反过来，任意 1 个排列总可以由 1 种填法得到．因此，所有不同的填法总数就是排列数 A_7^2 .

那么有多少种不同的填法呢？事实上完成这件事可分下面两个步骤（分步计数原理）：



第 1 步，先排第 1 个位置的元素，可以从这 7 个元素中任选 1 个填上，有 7 种方法；

第 2 步，确定排在第 2 个位置的元素，可以从剩下的 6 个元素中任选 1 个填上，有 6 种方法.

于是，根据分步计数原理，得到排列数

$$\mathrm{A}_7^2=7\times6=42.$$

显然，求排列数 A_7^3，可以依次填 3 个空位来考虑.

</td>
<td>通过对排列数计算的探究过程，让学生理解用分步计数原理计算排列数的方法.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>

$$A_7^3=7\times6\times5=210.$$

类似地，我们可得：

$$A_n^2=n(n-1),$$

$$A_n^3=n(n-1)(n-2),$$

……

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

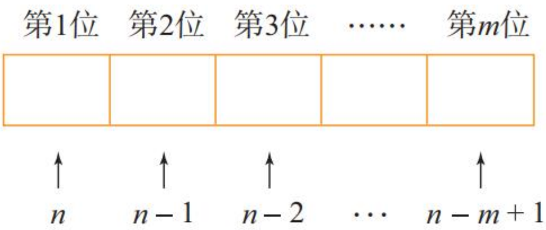
【问题 2】

如何计算排列数 A_n^m？

学生通过小组合作学习，进行探究.

可以这样来考虑：假定有排列顺序的 m 个空位（如图），从 n 个不同的元素 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 中任取 m 个去填空，1 个空位填 1 个元素，每一种填法就得到 1 种排列；反过来，任意 1 个排列总可以由 1 种填法得到.

因此，所有不同的填法总数就是排列数 A_n^m.



现在计算共有多少种不同的填法：

第 1 步，第 1 个位置，可以从这 n 个元素中任选 1 个填上，有 n 种填法；

第 2 步，第 2 个位置，只能从余下的 n-1 个元素中任选 1 个填上，有 n-1 种填法；

……

根据分步计数原理，全部填满 m 个空位共有

$$n\bullet(n-1)\bullet\cdots\bullet(n-m+1)$$

种填法.

</td><td>在具体实例中引导学生应用计算排列数的方法，推导出一般排列数的计算方法.
从具体到抽象建构新知，培养学生的抽象思维能力和数学建构思想.</td></tr>
<tr><td></td><td>

【新知探究】

</td><td>应用分步计</td></tr>
</table>

	由以上分析可得公式 $$A_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1),,$$ 其中 m，$n\in\mathbf{N}_+$，且 $m\leqslant n$，这个公式称为**排列数公式**. 在这个公式中，右边第 1 个因数是 n，后面每个因数依次比它的前一个因数少 1，最后一个因数是 n-m +1（即元素总数与选取元素个数之差加上 1），共 m 个因数相乘．例如， $$A_8^5=8\times7\times6\times5\times4=6\,720,,$$ $$A_7^6=7\times6\times5\times4\times3\times2=5\,040..$$ 在排列数公式 $$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$ 中，如果 $m=n$，即全排列时，排列数公式变成 $$\mathrm{A}_n^n=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1.$$ 这个公式指出，全排列的排列数等于自然数 1 到 n 的连乘积，这个连乘积称为 ***n*** **的阶乘**，用 $n!$表示，所以 n 个不同元素的全排列数公式可以写成 $$\mathrm{A}_n^n=n!.$$ 因为$(n-m)\times\cdots\times3\times2\times1=(n-m)!$，所以，排列数公式还可以写成 $$\mathrm{A}_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$ 我们规定 0!=1，所以，当 $n=m$ 时，（n-m）!=1，上述公式也是成立的.	数原理，借助类比的方法推导出排列数公式，让学生理解公式的结构和符号的意义. 帮助学生了解全排列数公式的结构和符号的意义. 提升学生的数学运算、数学抽象等素养.
	例 2　计算 A_{15}^4 及 A_5^5. **解**　$A_{15}^4=15\times14\times13\times12=32\,760$； $\mathrm{A}_5^5=5\times4\times3\times2\times1=120$. **【课堂练习】** 计算：	通过例题和练习，帮助学生掌握排列数公式的应用.

	（1）A_{100}^{3}；　（2）A_{6}^{6}； （3）$A_{8}^{4}-2A_{8}^{2}$；　（4）$A_{5}^{1}+A_{5}^{2}+A_{5}^{3}$； （5）$\dfrac{A_{7}^{5}}{A_{7}^{4}}$.	提升学生的数学运算、逻辑推理等素养.
小结	引导学生小结. （1）排列数的定义，表示排列数的符号. （2）排列数公式的推导过程，如何用排列数公式进行排列数的计算.	回顾学习的过程，总结本节课的收获.