7.2.2　组合（第 2 课时）

【学情分析】

在学习本节课前，学生已经学习了排列的相关知识及组合的概念．在此基础上，可以对学生的知识体系进行顺应性建构，应用分步计数原理和排列数公式推导出组合数公式，进而加深对组合数的理解．从学科核心素养角度来看，学生已经具备一定的数学运算、逻辑推理、数学抽象、数学建模等素养．教学时，教师应提供实际问题情境，引导学生进行主动探究、合作交流，提升学生的数学运算、逻辑推理、数学抽象、数学建模等素养．

【教学目标】

（1）能在组合概念的基础上理解组合数的定义，利用排列数与组合数的关系得到组合数公式，并能用公式求具体问题的组合数．

（2）注重培养和提升学生的数学运算、逻辑推理、数学抽象、数学建模等素养．

（3）结合生活实例，让学生感受数学来源于生活，运用于生活．通过解决问题，培养学生独立思考、交流合作的能力．

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是组合数公式，教学难点是组合数公式的推导过程及应用．

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	通过提问，复习前面所学知识． **【师生活动】** 教师：如何定义排列和组合？排列数的概念与公式是什么？ 排列的定义：一般地，从 n 个不同元素中，任取 m（$m\leqslant n$）个元素，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**排列**． 组合的定义：一般地，从n个不同元素中，任取m（$m \leq n$）个元素并成一组，称为从n个不同元素中取出m个元素的一个**组合**． 排列数的概念与公式：从 n 个不同元素中取出 m（$m\leq n$）个	回顾排列与组合的概念，以及二者之间的联系与区别，引导学生由排列数的概念和公式，类比推导出组合数的概念和公式．

	元素的所有排列的个数，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 表示，公式为 $A_n^m = n\bullet(n-1)\bullet(\mathrm{n}-2)\bullet\cdots\bullet(n-m+1)$.**追问：**排列与组合之间有什么联系与区别呢？	
新课	**【问题 1】** 在上节课中，我们通过一一列举的方式得到了各问题的组合个数，但随着元素个数的增加，这样的方法就越来越繁琐了.是否能像排列一样，找到计算组合个数的公式，从而便捷地求出组合个数？ **【师生活动】** （1）为了便于表达和计算组合个数，类比排列数，教师先引入组合数的定义. 从n个不同元素中取出m（$m \leq n$）个元素的所有组合的个数，称为从n个不同元素中取出m个元素的**组合数**，用符号 C_n^m 表示（C 是组合的英文 combination 的第一个字母的大写）. （2）例如，从 1，2 这两个元素中，每次任意取出 1 个作为一个组合，那么它可以构成两个组合，即 $\mathrm{C}_2^1=2$，这个结果 2 是从 2 个元素中任取 1 个元素的不同组合的个数，即组合数. 从 3 个不同元素中，取出 2 个元素的组合数表示为 C_3^2；从 4 个不同元素中，取出 3 个元素的组合数表示为 C_4^3. **追问：**从组合数的概念得知，组合数是一个正整数，那么 C_3^2 与 C_4^3 分别是多少呢？ 很显然，排列问题与组合问题有着密不可分的关系，本节课将从研究组合数 C_n^m 与排列数 A_n^m 的关系入手，找出组合数 C_n^m 的计算公式.	通过类比排列数的概念，引导学生得出组合数概念.通过实例，让学生理解组合数的意义，进一步明确排列与组合的关系，提升学生的逻辑推理素养和数学抽象素养.
	【问题2】 求从4个不同元素中取出3个元素的组合数 C_4^3.	通过具体实例计算组合数，挖掘排列

	①假设这四个元素分别为a，b，c，d； ②从中取出 3 个元素的排列数A_4^3=24，将其列举出来； ③以元素相同为标准，将这24个排列分组，一共有4组，如图所示，因此组合数C_4^3=4. 组　合　　　　排　列 abc ↔ abc bac cab / acb bca cba abd ↔ abd bad dab / adb bda dba acd ↔ acd cad dac / adc cda dca bcd ↔ bcd cbd dbc / bdc cdb dcb 观察上图,发现求从4个不同元素中取出3个元素的排列数A_4^3是由以下步骤完成的： 第 1 步，从 4 个不同元素中取出 3 个元素做组合，共有C_4^3个，由上述对应关系可知C_4^3＝4； 第 2 步，对每一组合中的 3 个不同元素做全排列，每一组合对应的全排列都是A_3^3＝6 个. 于是，根据分步计数原理，得$\mathrm{A}_4^3=\mathrm{C}_4^3\cdot\mathrm{A}_3^3$. 因此$\mathrm{C}_4^3=\frac{\mathrm{A}_4^3}{\mathrm{A}_3^3}=4$. **追问1**：依据求组合数$\mathrm{C}_4^3$的方法，如何求组合数$\mathrm{C}_n^m$？ 一般地，求从$n$个不同元素中取出$m$个元素的排列数$\mathrm{A}_n^m$，可以分如下两步完成： 第1步，求从这$n$个不同元素中取出$m$个元素的组合数$\mathrm{C}_n^m$； 第2步，求每一个组合中$m$个元素的全排列数$\mathrm{A}_m^m$. 根据分步计数原理，有$\mathrm{A}_n^m=\mathrm{C}_n^m\cdot\mathrm{A}_m^m$. 因此，$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$.	数与组合数之间的联系，对结论进行推广，得到组合数公式. 在此过程中，学生通过深入探究，在旧知识的基础上建构新知识，感受由特殊到一般的思维方法. 提升学生的逻辑推理素养和数学抽象素养.

	这里n，$m\in \mathbf{N}^*$，并且$m\le n$．这个公式称为**组合数公式.** **追问2**：由$\mathrm{C}_n^m=\dfrac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}$还可以得到组合数公式的什么形式？ 因为排列数公式有两种形式，由$\mathrm{C}_n^m=\dfrac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}$可以得到组合数公式的另一种形式$\mathrm{C}_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$．	
	【问题3】 上述组合数公式有什么特点？使用公式需要注意什么？ （1）公式$\mathrm{C}_n^m=\dfrac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$（$m$，$n\in\mathbf{N}^*$，且$m\leqslant n$），一般用于求值计算. （2）公式$\mathrm{C}_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$（$m$，$n\in\mathbf{N}^*$，且$m\leqslant n$），一般用于化简证明. 在具体选择公式时，要根据题目特点正确选择. 规定$\mathrm{C}_n^0=1$． **例1**　计算C_{10}^4及C_7^3． **解**：根据组合数公式可得： $$\mathrm{C}_{10}^4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210;$$ $$\mathrm{C}_7^3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35.$$ **例2**　从10名运动员中，选出3名参加比赛，则有多少种选法？ **解**：实际上这是从10个不同元素中取出3个元素的组合问题，即 $$\mathrm{C}_{10}^3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120,$$	让学生熟悉组合数公式的特点，通过例题和练习熟练应用公式. 提升学生的数学运算素养

	也就是说，有 120 种选法． **例 3**　平面内有 12 个点，其中任意 3 点都不在同一条直线上，以任意 3 点为顶点画三角形，一共可画多少个三角形？ **解**：因为平面内的 12 个点中任意 3 点都不在同一直线上，所以，任意 3 个点都可以构成一个三角形的顶点，那么以平面内 12 个点的任意 3 个点为顶点画三角形，可以画出的三角形个数，就是从 12 个不同元素中取出 3 个元素的组合数，即 $\mathrm{C}_{12}^{3}=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$， 也就是说，一共可画 220 个三角形． **例 4**　（1）从全班 50 人中选班委 7 人，共有多少种不同的选法？ （2）从全班 50 人中选班长、副班长、学习委员、体育委员、宣传委员、生活委员、文娱委员各一人，共有多少种不同的选法？ **分析**：（1）与顺序无关，是组合问题；（2）与顺序有关，是排列问题． **解**：（1）$\mathrm{C}_{50}^{7}=\frac{50!}{7!(50-7)!}=99\,884\,400$. （2）$\mathrm{A}_{50}^{7}=50\times49\times48\times47\times46\times45\times44$ $=503\,417\,376\,000$. 排列问题与组合问题的根本区别在于，取出元素后是否要按一定顺序排列．元素需要按一定顺序排列，属排列问题；不需要考虑元素顺序，属组合问题． **练习** 计算：C_{6}^{2}，C_{8}^{3}，$\mathrm{C}_{4}^{3}+\mathrm{C}_{3}^{1}$，$\mathrm{C}_{7}^{3}-\mathrm{C}_{5}^{2}$．	和数学抽象素养． 选择合适的组合数公式进行运算和证明，帮助学生熟练应用公式．
小结	引导学生小结． 回顾本节课学习的主要内容，并让学生回答下列问题． （1）说明组合与组合数的区别． （2）组合数公式是如何推导出来的？	通过小结回顾组合数的概念及组合数公式的推导，归

	（3）如何解决组合问题？应用组合数公式时需要注意什么？	纳解决组合问题的一般方法.