7.2.2 组合（第 3 课时）

【学情分析】

排列、组合是两类特殊而重要的计数问题，解决它们的基本思想和工具就是两个计数原理.在前面学生学习了排列、组合的相关概念，掌握了排列数公式和组合数公式. 在本节课的教学中，要借助这些已有的知识，通过观察、分析、类比、归纳，帮助学生理解组合数的两个性质. 排列与组合是初等代数中比较独特的内容，它研究的对象以及研究问题的方法都与学生已掌握的数学知识有较大的不同，在一定程度上有利于培养学生的数学运算、逻辑推理、数学抽象、数学建模等素养.

【教学目标】

（1）了解组合数的两个性质及其证明方法，利用组合数的两个性质进行有关计算.

（2）引导学生感受由特殊到一般，从具体到抽象的思维方法，注重培养和提升学生的数学运算、逻辑推理、数学抽象、数学建模等素养.

（3）结合生活实例，让学生感受数学来源于生活，运用于生活. 通过解决问题，培养学生独立思考、交流合作的品质.

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是组合数的两个性质及其应用，教学难点是用组合的定义理解组合数的两个性质（特别是对第二个性质的理解与应用）.

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	通过提问，复习前面所学知识. 1．排列数的概念与公式 一般地，从 n 个不同元素中取出 m（$m \leqslant n$）个元素的所有排列的个数，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**排列数**，用符号 A_n^m 表示. 公式为：$A_n^m = n\bullet(n-1)\bullet(n-2)\bullet\cdots\bullet(n-m+1)$，	带领学生回顾排列数与组合数的公式，有助于学生在本节课中应用公式进行计算和证明.

	$\mathrm{A}_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$. 2．组合数的概念与公式 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有组合的个数，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**组合数**，用符号 C_n^m 表示． 公式为：$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$， $\mathrm{C}_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$. **追问：**排列与组合的定义有什么区别和联系呢？ 3．练习 计算：（1）C_4^3和C_4^1；（2）C_5^3和C_5^2；（3）$C_6^3+C_6^4$.	
新课	【问题 1】 通过课前问题及练习中的（1）和（2），你有何发现? **例 5** 某小组有 7 人： （1）选出 3 人植树，可以有多少种不同的选法？ （2）选出 4 人清扫校园，可以有多少种不同的选法？ **解：**（1）$\mathrm{C}_7^3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$； （2）$\mathrm{C}_7^4=\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35$. 即选出 3 人植树或选出 4 人清扫校园都有 35 种不同的选法． 从这个例题可以看出，从 7 个不同的元素中选出 3 个和选出 7－3＝4（个）的组合数是相等的，即 $\mathrm{C}_7^3=\mathrm{C}_7^4$. **【问题 2】** 将上述情况加以推广，可得到组合数的什么性质? 由学生的计算结果发现，C_4^3=C_4^1，$\mathrm{C}_5^3=\mathrm{C}_5^2$，$\mathrm{C}_7^3=\mathrm{C}_7^4$，从而归纳出组合数的如下性质．	通过具体实例，发现组合数的特殊性质，通过类推得到组合数的定理 1，再利用组合数公式给予严谨的证明． 引导学生感受由特殊到一般，从具体到抽象的思维方法，提升学生的逻辑推理、数学抽象等素

	定理 1：$C_n^m=C_n^{n-m}$ (n，$m\in\mathbf{N}^*$，$m\leqslant n$) . 这个定理可以由学生应用组合数公式进行证明，也可以引导学生创设实际问题情境来解释. **证明**：因为 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ ， $C_n^{n-m}=\dfrac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ ， 所以 $C_n^m=C_n^{n-m}$.	养.
	这个性质也可以从组合的定义得出．从 n 个元素中取 m 个并成一个组合后，剩下的 n-m 个元素相应地也构成了一个组合，每从 n 个元素中取出不同的 m 个元素构成不同的组合，剩下的 n-m 个元素同样也是不同的组合，并且这种对应关系是一对一的，所以有多少个从 n 个元素中取 m 个元素的组合，相应的就有多少个从 n 个元素中取 n-m 个元素的组合，即 $$C_n^m=C_n^{n-m}\ (n,\ m\in\mathbf{N}^*,\ m\leqslant n).$$ 为了使这个公式在 m＝n 时也成立，我们约定：$C_n^0=1$. **例 6**　计算 C_{18}^{15} 及 C_{20}^{18} . **解**：$C_{18}^{15}=C_{18}^{18-15}=C_{18}^{3}=\dfrac{18\times17\times16}{3\times2\times1}=816$. $C_{20}^{18}=C_{20}^{20-18}=C_{20}^{2}=\dfrac{20\times19}{2\times1}=190$.	使学生进一步理解组合数的定理 1，并能应用它解决简单问题.
	定理 2：$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$. **证明**：$C_n^m+C_n^{m-1}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}+\dfrac{n!}{(m-1)![n-(m-1)]!}$ $=\dfrac{n!(n-m+1)+n!m}{m!(n-m+1)!}$ $=\dfrac{(n-m+1+m)n!}{m!(n+1-m)!}$	

	$=\dfrac{(n+1)!}{m![(n+1)-m)]!}$ $=\mathrm{C}_{n+1}^{m}$. 于是 $\mathrm{C}_{n+1}^{m}=\mathrm{C}_{n}^{m}+\mathrm{C}_{n}^{m-1}$. 这个性质也可以根据组合的定义和分类计数原理得出. 从 a_1，a_2，…，a_n，a_{n+1} 这 $n+1$ 个不同元素中，取出 m 个元素的组合数是 C_{n+1}^{m} . 这些组合可分为两类，一类包含 a_1，另一类不包含 a_1 . 含有 a_1 的组合是从 a_2，a_3，…，a_n，a_{n+1} 中取出 m-1 个元素与 a_1 组成的，共有 C_{n}^{m-1} 个；不含 a_1 的组合是从 a_2，a_3，…，a_n，a_{n+1} 这 n 个元素中取出 m 个元素组成的，共有 C_{n}^{m} 个. 根据分类计数原理，得 $\mathrm{C}_{n+1}^{m}=\mathrm{C}_{n}^{m}+\mathrm{C}_{n}^{m-1}$. **例 7**　计算 $\mathrm{C}_{99}^{96}+\mathrm{C}_{99}^{97}$. **解**：　由定理 2，得 $\mathrm{C}_{99}^{96}+\mathrm{C}_{99}^{97}=\mathrm{C}_{100}^{97}$. 由定理 1，得 $\mathrm{C}_{100}^{97}=\mathrm{C}_{100}^{3}=\dfrac{100\times 99\times 98}{3\times 2\times 1}=161\,700$. 本题也可以先利用定理 1，然后利用定理 2 来解决，请同学们自己完成. **追问**：（1）比较用不同形式的组合数公式和结论求上述各题，你对公式和结论的选择有什么想法？ （2）分别观察例题中的结果，你有什么发现和猜想？ **练习** 1．计算： （1）C_{100}^{98}；（2）C_{9}^{7}；（3）$\mathrm{C}_{10}^{5}+\mathrm{C}_{10}^{4}-\mathrm{C}_{11}^{5}$. 2．求证：$\mathrm{C}_{n}^{m}=\dfrac{m+1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}$.	选择合适的组合数公式进行运算和证明，帮助学生理解组合数的性质并熟练应用公式.
小结	引导学生小结.	回顾学习的

	定理 1： $\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}\ (n，m\in\mathbf{N}^*，m\leqslant n)$. **定理 2：** $\mathrm{C}_{n+1}^m=\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}$.	过程，总结本节课的收获.