

7.2.3 排列、组合的应用（第1课时）

【学情分析】

从知识水平看，通过前面课程的学习，学生基本掌握了两个计数原理、排列与组合的定义、排列数和组合数公式等，初步学会了解决排列、组合问题的基本方法，能结合两个计数原理解决简单的有限制条件和无限制条件的排列问题，为本节课的学习打下了基础。学生具备一定的数学运算、逻辑推理、数学建模等素养，但抽象思维能力、数学思维能力等相对薄弱，而排列、组合问题对解题思维的要求较高，因此在教学时，教师要多分析、多示范、多练习，逐步提升学生的各方面能力。

【教学目标】

- (1) 熟练应用排列组合知识、两个计数原理解决简单的排列组合应用问题。
- (2) 通过解决排列组合的实际问题，提升学生的数学运算、逻辑推理、数学建模等素养，培养学生化归转化和逆向思维解题的能力。
- (3) 用数学思想解决实际问题，让学生感受数学来源于生活，运用于生活。通过解决问题，培养学生独立思考、交流合作的能力。

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是区分排列问题和组合问题，解决简单的排列组合应用问题；教学难点是引导学生探究、归纳、总结解决问题的规律和方法。

【教学过程】

| 教学环节 | 教学内容 | 设计意图 |
|------|---|--|
| 复习 | <p>【复习回顾】</p> <p>1. 排列数公式是什么？</p> $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$ <p>2. 组合数公式是什么？</p> $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$ $= \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (n, m \in \mathbb{N}^*, \text{且 } m \leq n).$ | 复习前面学过的知识，如计数原理及排列数、组合数计算公式等，为本节课的学习做铺垫。 |

| | | |
|----|--|---------------------------|
| | <p>3. 说出排列与组合定义的区别. 排列的元素是有序的，组合的元素是无序的.</p> <p>4. 基本计数原理包括哪两种? 分类计数原理和分步计数原理.</p> | |
| 新课 | <p>例 1 在产品检验时，常从产品中抽取一部分产品进行检查. 现从 100 件产品中，任意抽取 3 件：</p> <p>(1) 一共有多少种不同的抽法?</p> <p>(2) 如果 100 件产品中有 2 件次品，抽出的 3 件中恰有 1 件次品的抽法共有多少种?</p> <p>(3) 如果 100 件产品中有 2 件次品，抽出的 3 件中至少有 1 件次品的抽法共有多少种?</p> <p>分析：本题可用组合数公式和分步计数原理解决.</p> <p>解：(1) 所求的抽法总数，就是从 100 件产品中取出 3 件的组合数</p> $C_{100}^3 = \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1} = 161\,700.$ <p>(2) 从 2 件次品中抽出 1 件次品的抽法有 C_2^1 种，从 98 件合格品中抽出 2 件合格品的抽法有 C_{98}^2 种，因此抽出 3 件中恰有 1 件次品的抽法的种数是</p> $C_2^1 \cdot C_{98}^2 = 2 \times 4\,753 = 9\,506.$ <p>(3) 从 100 件产品中抽出 3 件，一共有 C_{100}^3 种抽法，在这些抽法里，除抽出的 3 件都是合格品的抽法外，剩下的便是抽出的 3 件中，至少有 1 件是次品的抽法的种数，即</p> $C_{100}^3 - C_{98}^3 = 161\,700 - 152\,096 = 9\,604.$ <p>本小题也可以这样来解：从 100 件产品中抽出的 3 件中，至少有 1 件次品的抽法，包括 1 件是次品的和 2 件是次品的，其中 1 件是次品的抽法有 $C_{98}^2 \cdot C_2^1$ 种，2 件次品的抽法有 $C_{98}^1 \cdot C_2^2$ 种，因此至少有 1 件是次品的抽法的种数为</p> $C_{98}^2 \cdot C_2^1 + C_{98}^1 \cdot C_2^2 = 9\,506 + 98 = 9\,604.$ | 通过日常生活中的实例，鼓励学生动脑思考、动手实践. |
| | <p>例 2 一次抛掷 5 枚不同的硬币，则可能出现的结果一共有</p> | 适当增加难 |

| | | |
|--|--|--|
| | <p>多少种?</p> <p>解: 由于抛掷每枚硬币只有正面(出现币值的一面)、反面两种结果, 所以这个问题相当于从5枚硬币中, 依次取一枚硬币的正面或反面填入5个空位, 共有多少种填法. 由于每一个空位都有两种填法, 所以依分步计数原理, 抛掷5枚硬币可能出现的结果共有</p> $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32 \text{ (种).}$ <p>【随堂练习】</p> <ol style="list-style-type: none"> 把一个圆周分成36等份, 过其中任意3个点可构成_____个圆内接三角形. 解法略. 从6种花卉中任选5种, 分别种在不同形状的5个花盆中, 共有_____种不同的种法. 解法略. | <p>度, 培养学生的抽象思维能力, 总结解题思路和方法.</p> <p>随堂练习, 巩固新知.</p> |
| | <p>例3 圆周上共有15个不同的点, 过其中任意两点连一条弦, 这些弦在圆内的交点最多有多少个?</p> <p>解: 若两弦有交点, 则两弦应是圆内接四边形的对角线, 即一个四边形对应一个交点, 所以共有$C_{15}^4 = 1365$个交点.</p> <p>【随堂练习】</p> <ol style="list-style-type: none"> 某学校计算机(1)班有6本不同的书, 按下列要求各有多少种不同的分法: <ol style="list-style-type: none"> 分给甲、乙、丙三人, 每人2本; 分为三份, 一份1本, 一份2本, 一份3本. <p>解: (1) 根据分步计数原理, 得: $C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 90$ (种); (2) 一共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 = 60$ (种).</p> <ol style="list-style-type: none"> 四个不同的小球放入四个不同的盒中, 一共有多少种不同的放法? <p>解: 根据分步计数原理, 一共有$4^4 = 256$种放法.</p> | <p>启发学生用转化或逆向思维方式解题, 培养学生的数学思维能力.</p> |
| | <p>例4 从6名学生中选出2名学生:</p> <ol style="list-style-type: none"> 去参加一个调查会, 有多少种不同的选法? | 帮助学生正 |

| | | |
|----|---|--------------------|
| | <p>(2) 担任两项不同的工作, 有多少种不同的选法?</p> <p>分析: 两个人参加一个调查会, 是无序的, 属于组合问题; 两个人担任两项不同的工作, 是有序的, 属于排列问题.</p> <p>解: (1) 不同的选法有 $C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ (种);</p> <p>(2) 不同的选法有 $A_6^2 = 6 \times 5 = 30$ (种).</p> | 确区分排列问题与组合问题. |
| 小结 | <p>引导学生小结.</p> <ol style="list-style-type: none"> 基本计数原理(分类计数原理、分步计数原理)在排列、组合问题中的应用. 应用排列数和组合数的计算公式解决相关应用题的方法. 用转化或逆向思维方式解题的方法(如例3). | 回顾学习的过程, 总结本节课的收获. |