

7.2.3 排列、组合的应用（第2课时）

【学情分析】

从知识水平看，通过前面课程的学习，学生基本掌握了两个计数原理、排列与组合的定义、排列数和组合数公式等，初步掌握了解决简单排列、组合应用问题的思路及方法，为本节课的学习打下了基础。学生具备一定的数学运算、逻辑推理、数学建模等素养，因排列、组合的应用问题对解题思维的要求相对较高，所以在教学时，教师要多分析、多引导、多练习，逐步提升学生的各方面能力。

【教学目标】

- (1) 利用排列、组合知识，两个计数原理等，解决排列、组合的综合应用问题，掌握重点题型的解题策略，学会使用计算器进行排列数、组合数的运算。
- (2) 通过应用排列、组合知识解决实际问题，提升学生的数学运算、逻辑推理、数学建模等素养，提高学生化归转化和逆向思维解题的能力。
- (3) 用数学思想解决实际问题，让学生感受数学来源于生活，运用于生活。通过解决问题，培养学生独立思考、交流合作的品质。

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是排列、组合的综合应用，教学难点是掌握重点题型的解题策略，提高分析、解决问题的能力。

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	<p>【复习回顾】</p> <p>1. 排列数公式</p> $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$ <p>2. 组合数公式</p> $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$ $= \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (n, m \in \mathbb{N}^*, \text{且 } m \leq n).$	复习前面学过的排列数、组合数公式等知识点，为本节课学习打基础。

	<p>【问题情境】</p> <p>如果有 7 名学生拍摄集体照，要排成一排，有两名学生必须相邻，那么共有多少种不同的排法？</p> <p>分析：根据分步计数原理，分成两步来排队。第一步，将这两个人的顺序排好。第二步，将这两个人作为一个整体，与剩下的 5 名学生一起排队。</p> <p>解：不同的排法共有：$A_2^2 \cdot A_6^6 = 2 \times 1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 1440$（种）。</p>	<p>通过问题情境，复习利用计数原理和排列、组合知识解决排列、组合应用问题的方法。</p>
新课	<p>例 5 某城市的电话号码是从 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中取 7 个数字构成（允许数字重复），但 0, 1 不能作为电话号码的首位数，则该城市最多可装多少门电话？</p> <p>解：这个问题实际上是一个允许数字重复的排列问题。由于首位不能排 0, 1 两个数字，所以首位号码只能从 2, 3, …, 9 这 8 个数字中任取 1 个，有 C_8^1 种取法，因为允许重复，所以第 2 到第 7 个空位都可以分别选择上述 10 个数字。依分步计数原理，所有可能的取法共有</p> $C_8^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 = 8 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 8\ 000\ 000 \text{ (门)}$ <p>即这个城市最多可装电话 800 万门。</p>	<p>例 5 是有限制条件的排列问题，先排特殊位置，再排其他位置。通过求解有限制条件的排列问题，引导学生总结这类问题的解决方法和策略。</p>
	<p>例 6 4 个男同学进行乒乓球双打比赛，有几种配组方法？</p> <p>解：设 4 人分别为 A, B, C, D，则从 4 人中任选 2 人配成一组的方法有 $C_4^2 = 6$ 种，这 6 种方法是 (A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D)。然而，选出 (A, B) 后，(C, D) 自然成另一组，这与选定 (C, D)，则 (A, B) 自然成另一组是一回事，所以上 6 种方法两两重复，故实际配对方法是</p> $\frac{1}{2} C_4^2 = 3 \text{ (种)}$	<p>通过不同的解题方法，引导学生从不同角度思考，进而解决问题。</p>

	<p>此题还可从另一角度去分析：先固定 1 人，然后在其余 3 人中再选 1 人与之配对，则另 2 人自然组成一组，故共有配组方法 $C_3^1=3$ (种).</p> <p>【随堂练习】</p> <ol style="list-style-type: none"> 从 1, 2, 3, 4, 5 中任取两个数字，组成无重复的两位奇数，共有_____个. 某校平面设计班有男生 5 人、女生 30 人，若要选男、女生各 1 人作为学生代表参加学校 100 米跑步比赛，共有_____种不同的选法. 一种密码锁的密码由 1 到 9 中的 8 个数字组成（数字允许重复），可以组成_____个密码. 	<p>讲 练 相 结 合，巩固所学 知识.</p>								
	<p>例 7 设某景区某日接待游客 10 000 人，如果从这些游客中任意选出 10 名幸运游客，一共有多少种不同的选择（保留 4 位有效数字）？若把 10 份不同的纪念品发给选出的幸运游客每人 1 份，又有多少种不同的选择？</p> <p>解：从 10 000 人中选出 10 人的选择有 C_{10000}^{10} 种，用计算器计算：</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; width: fit-content;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">操作</th> <th style="text-align: center;">显示</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">10000 [SHIFT] [nCr] 10 [=]</td> <td style="text-align: center;">$2.743355078 \times 10^{33}$</td> </tr> </tbody> </table> <p>所以 $C_{10000}^{10} \approx 2.743 \times 10^{33}$，一共约有 2.743×10^{33} 种不同的选择。</p> <p>10 个人领取 10 份不同的纪念品的情况有 A_{10}^{10} 种，用计算器计算：</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; width: fit-content;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">操作</th> <th style="text-align: center;">显示</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">10 [SHIFT] [nPr] 10 [=]</td> <td style="text-align: center;">3628800</td> </tr> </tbody> </table> <p>所以 $A_{10}^{10} = 3628800$，有 3628800 种不同的选择。</p> <p>计算 A_{10}^{10} 时还可通过 $A_{10}^{10} = 10!$ 计算：</p>	操作	显示	10000 [SHIFT] [nCr] 10 [=]	$2.743355078 \times 10^{33}$	操作	显示	10 [SHIFT] [nPr] 10 [=]	3628800	<p>让学生学会 使用计算器进 行排列数、组 合数的运算.</p>
操作	显示									
10000 [SHIFT] [nCr] 10 [=]	$2.743355078 \times 10^{33}$									
操作	显示									
10 [SHIFT] [nPr] 10 [=]	3628800									

	<table border="1"> <thead> <tr> <th style="background-color: #d9e1f2;">操作</th><th style="background-color: #d9e1f2;">显示</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>10 [SHIFT] $x!$ [=]</td><td>3628800</td></tr> </tbody> </table>	操作	显示	10 [SHIFT] $x!$ [=]	3628800	
操作	显示					
10 [SHIFT] $x!$ [=]	3628800					
	<p>【随堂练习】</p> <p>1. 从南、北两个方向分别有 5 条、3 条路通往山顶，某人从一面上山由另一面下山，共有多少种走法？</p> <p>2. 6 人同时被邀请参加一项活动，必须有人去，去几人自行决定，共有多少种不同的去法？</p> <p>3. 把 3 封信投入 4 个邮筒：</p> <p>(1) 如果限制每个邮筒最多可投 1 封信，有多少种不同的投寄方法？</p> <p>(2) 没有上面的限制，不同的投寄方法有多少种？</p> <p>4. 有 8 本不同的杂志：</p> <p>(1) 平均分成两堆，有多少种不同的分法？</p> <p>(2) 平均分给两个人看，有多少种不同的分法？</p>	通过随堂练习，加深学生对排列、组合综合应用问题的解题策略和方法的理解，提升学生的数学运算、逻辑推理、数学建模等素养.				
小结	<p>引导学生小结.</p> <p>1. 分类计数原理、分步计数原理在排列、组合问题中的应用.</p> <p>2. 应用排列数公式和组合数公式解决相关应用问题的方法.</p> <p>3. 使用计算器计算排列、组合的相关问题的方法.</p>	回顾学习的过程，总结本节课的收获.				