7.2.4　二项式定理（第 1 课时）

【学情分析】

学生在基础模块学习了概率的一些基本知识，在前面几节课又学习了两个计数原理和排列、组合相关知识．在此基础上，可以对学生的知识体系进行顺应性建构，在计数原理和排列、组合等知识的支撑下，让学生先观察低次二项式的展开式，再深入探讨二项展开式的结构和规律，从而得到二项式定理，接着引出二项展开式的通项公式、二项式系数的概念．学生已经具备了一定的分析、探究和归纳的能力，但抽象思维能力和推理能力较为薄弱，因此在教学时，教师要多分析、多示范、多练习，逐步提升学生的各方面能力．

【教学目标】

（1）理解二项展开式概念，掌握二项展开式的结构特征．

（2）通过观察、探究、归纳的学习过程，提升学生的逻辑推理、数学抽象等素养．

（3）通过让学生进行小组合作探究学习，激发探究问题的兴趣，增强合作交流的意识，提高动手操作的能力，增强解决问题的信心，获得解决问题的成功体验．

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是二项式定理的推导过程、二项展开式的结构规律、二项展开式的通项公式和二项式系数的概念，教学难点是区分二项展开式中某一项的二项式系数与该项的系数．

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	**【复习提问】** 1．两个计数原理分别是什么？ 2．什么是排列？排列数公式是怎样表示的？ 3．什么是组合？组合数公式是怎样表示的？ 4．说出排列与组合的区别.	通过复习计数原理、排列、组合等知识点，为本节课的学习做铺垫.
新课	【学生活动】计算：$(a+b)^1=a+b$； $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；	

	$\left(a+b\right)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. **【问题情境】** $\left(a+b\right)^4=\left(a+b\right)\left(a+b\right)\left(a+b\right)\left(a+b\right)$. 根据前面的计算结果，猜想$\left(a+b\right)^4$的展开式的各项分别是什么. **分析**：等号右边的积的展开式的每一项，是从 4 个括号中每个里任取一个字母的乘积，因而各项都是 4 次式，即展开式应有下面形式的各项：a^4，a^3b，a^2b^2，ab^3，b^4. **思考**：在展开式中各项的系数是什么?（用组合的概念来考虑） 在上面 4 个括号中，依次取出一个元素，以元素 b 作为参照： ①每个括号里都不取 b 的情况有 1 种，即C_4^0种，所以a^4的系数是C_4^0； ②恰有 1 个括号中取 b 的情况有C_4^1种，所以a^3b的系数是C_4^1； ③恰有 2 个括号中取 b 的情况有C_4^2种，所以a^2b^2的系数是C_4^2； ④恰有 3 个括号中取 b 的情况有C_4^3种，所以ab^3的系数是C_4^3； ⑤4 个括号中都取 b 的情况有C_4^4种，所以b^4的系数是C_4^4. 因此 $(a+b)^4=\mathrm{C}_4^0a^4+\mathrm{C}_4^1a^3b^1+\mathrm{C}_4^2a^2b^2+\mathrm{C}_4^3ab^3+\mathrm{C}_4^4b^4$ 结合以上具体例子的展开式，分析展开式的结构和规律，要从次数、二项式系数两个方面进行剖析. 类比猜想：$\left(a+b\right)^5=$？	通过实例引入，让学生参与探究$\left(a+b\right)^4$的展开式，体会每一项的生成过程，寻找二项展开式的内在规律，提高学生的观察、分析、归纳能力以及方法迁移能力.

	$(a+b)^6=?$	
	【新知探究】 一般地，可以证明有下面的公式： $(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^nb^0+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+\mathrm{C}_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+\mathrm{C}_n^na^0b^n$. 这个公式所表示的规律称为**二项式定理**，右边的多项式称为$(a+b)^n$的展开式，其中$\mathrm{C}_n^ma^{n-m}b^m$是展开式中的第$m+1$项（通常用T_{m+1}表示），C_n^m称为第$m+1$项的**二项式系数**，我们将 $T_{m+1}=\mathrm{C}_n^ma^{n-m}b^m(m=0，1，2，\cdots，n)$ 称为二项展开式的**通项公式**，它在研究二项式过程中有极其重要的作用.	通过对问题的类比迁移，用从具体到一般的数学思想推出二项式定理. 掌握二项展开式的结构和规律，类比数列的通项公式，理解二项式的通项公式. 提升学生的逻辑推理、数学抽象等素养.
	例 1　求$(x+\frac{1}{x})^5$的二项展开式. **解**：$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=\mathrm{C}_5^0x^5\left(\frac{1}{x}\right)^0+\mathrm{C}_5^1x^4\left(\frac{1}{x}\right)^1+\mathrm{C}_5^2x^3(\frac{1}{x})^2+$ $\mathrm{C}_5^3x^2(\frac{1}{x})^3+\mathrm{C}_5^4x^1(\frac{1}{x})^4+\mathrm{C}_5^5x^0(\frac{1}{x})^5$ $=x^5+5x^3+10x+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}$. **例 2**　求$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$的二项展开式的第 6 项. **解**：$T_6=C_{10}^5\left(\sqrt{x}\right)^5\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5=\mathrm{C}_{10}^5=252$. **例 3**　求$(1+x)^5+(1-x)^5$的展开式. **解**：在二项式定理中，如果设$a$=1，$b$=$x$，则得到公式	通过典型例题，让学生熟练掌握二项式定理，提升学生的数学运算素养.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$(1+x)^n = 1 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^m x^m + \cdots + x^n$.
由此公式，得
原式$=1 + \mathrm{C}_5^1 x + \mathrm{C}_5^2 x^2 + \mathrm{C}_5^3 x^3 + \mathrm{C}_5^4 x^4 + x^5 +$
$1 + \mathrm{C}_5^1(-x) + \mathrm{C}_5^2(-x)^2 + \mathrm{C}_5^3(-x)^3 +$
$\mathrm{C}_5^4(-x)^4 + (-x)^5$
$=1 + \mathrm{C}_5^1 x + \mathrm{C}_5^2 x^2 + \mathrm{C}_5^3 x^3 + \mathrm{C}_5^4 x^4 + x^5 +$
$1 - \mathrm{C}_5^1 x + \mathrm{C}_5^2 x^2 - \mathrm{C}_5^3 x^3 + \mathrm{C}_5^4 x^4 - x^5$
$= 2 + 2C_5^2 x^2 + 2C_5^4 x^4 = 2 + 20x^2 + 10x^4$.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>例 4　求$(x-\frac{1}{x})^9$的二项展开式中x^3的系数.
解：展开式的通项为
$$T_{m+1} = \mathrm{C}_9^m x^{9-m}(-\frac{1}{x})^m = (-1)^m \mathrm{C}_9^m x^{9-2m},$$
根据题意，有 9-2m=3，解得 m=3.
因此，x^3的系数是
$$(-1)^3\mathrm{C}_9^3 = (-1)^3 \times \frac{9\times8\times7}{3!} = -84.$$
需要注意的是，二项展开式中第 m+1 项的系数与第 m+1 项的二项式系数C_n^m是两个不同的概念，这一点一定要分清楚. 例如，在$(1+2x)^7$的二项展开式中，第 4 项$T_4 = \mathrm{C}_7^3 1^{7-3}(2x)^3$的二项式系数是$\mathrm{C}_7^3$=35；而第 4 项的系数是指$x^3$的系数，应是$\mathrm{C}_7^3 \times 8$=280.
例 5　求$\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$展开式的常数项.
解：展开式的通项为
$$T_{m+1} = \mathrm{C}_6^m \left(2\sqrt{x}\right)^{6-m}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^m = \left(-1\right)^m \mathrm{C}_6^m 2^{6-m} x^{3-m}.$$
根据题意，有 3-m=0，m=3.
因此，常数项是$\left(-1\right)^3 \mathrm{C}_6^3 \cdot 2^3 = -160$.
例 6　计算0.997^5的近似值（精确到 0.001）.</td>
<td>在例 4、例 5 中，注意区别二项式系数和二项展开式某一项的系数.

例 6 是二项</td>
</tr>
</table>

	解：$0.997^5=\left(1-0.003\right)^5=1-5\times0.003+10\times0.003^2-\cdots$. 根据题中精确度的要求，从第 3 项及以后的各项都可舍去，所以 $$0.997^5\approx1-5\times0.003=0.985.$$	式定理的简单应用，求某些指数式的近似值.
小结	引导学生小结. （1）什么是二项式定理？ （2）二项展开式的结构和规律是什么？ （3）二项展开式的通项是什么？什么是二项式系数？	回顾学习的过程，总结本节课的收获.