7.2.4　二项式定理（第 2 课时）

【学情分析】

学生在前面已经学习了两个计数原理和二项式定理，在此基础上，可以对学生的知识体系进行顺应性建构．本课时主要让学生通过观察“杨辉三角”包含的规律，结合“杨辉三角”中较为直观的数字规律得出二项式系数的性质．学生已经具备了一定的分析、探究和归纳的能力，教师只要在适当的时机对学生进行引导，就能帮助学生建立知识之间的相互联系，解决相关问题．作为中职学生，其抽象思维能力和推理能力相对薄弱，故不宜在课堂上对性质进行证明，耗时又不利于学生理解．

【教学目标】

（1）通过探究活动，归纳并记忆二项式系数的三个性质．

（2）会应用性质解决简单问题，提升学生的数学抽象核心素养．

（3）通过探究“杨辉三角”中包含的规律，让学生感受我国古代的数学成就及数学美，激发学生的民族自豪感．

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是说出并熟记二项式系数的有关性质，教学难点是应用二项式系数性质解决问题．

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	**【问题 1】**二项式系数是什么？二项展开式的通项是什么？ **【答案】**二项式定理： $\left(a+b\right)^n=\mathrm{C}_n^0a^nb^0+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+\mathrm{C}_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+\mathrm{C}_n^na^0b^n$. 公式等号右边的多项式称为$\left(a+b\right)^n$的二项展开式． C_n^m称为第$m+1$项的**二项式系数**． $\left(a+b\right)^n$展开式的第 m+1 项，用 $$T_{m+1}=\mathrm{C}_n^ma^{n-m}b^m$$ 表示．	检查学生上节课的学习效果，也为本节课的学习做必要准备．

【问题 2】组合数的性质有哪些？

【答案】性质 1：$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$ $(n,\ m\in\mathbf{N}^*,\ m\leqslant n)$；

性质 2：$\mathrm{C}_{n+1}^m=\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}$．

新课

【问题 3】根据二项式定理，利用工具计算 $(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数，并填入下表．通过计算、填表，你发现了什么规律？

n	$(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数						
1							
2							
3							
4							
5							
6							

【答案】每一行都是对称的，且两端的数都是 1．

n	$(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

【追问】为了方便发现规律，把上表写成如下形式：

$(a+b)^1$ ……………………… 1 1

$(a+b)^2$ ……………………… 1 2 1

$(a+b)^3$ ……………… 1 3 3 1

$(a+b)^4$ ………… 1 4 6 4 1

$(a+b)^5$ ……… 1 5 10 10 5 1

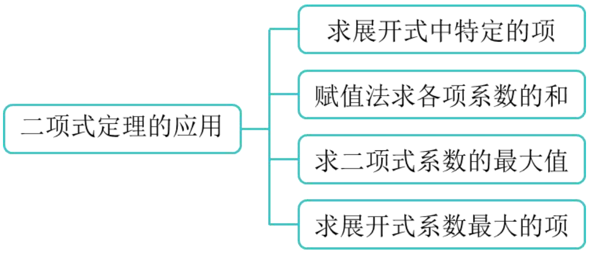
$(a+b)^6$ …… 1 6 15 20 15 6 1

让学生进一步熟悉二项式定理以及二项式系数的求法，化繁为简，化抽象为直观，为下一步的探究打下基础．

上述二项式系数列成的表，称为“杨辉三角”或“贾宪三角”．杨辉是我国宋朝时的数学家，他于 1261 年著《详解九章算法》，在其中详细列出了上述这样一张图表，并且指出这个方

让学生感受我国古代数学成就，激

	法出于更早期贾宪的著作《皇帝九章算法细草》．在欧洲一般都认为这是帕斯卡于 1654 年发明的，所以称这个图形为“帕斯卡三角”．	发学生的民族自豪感．
	【问题 4】观察“杨辉三角”中的数字，你能发现什么规律吗？ **【预案】**可以看出二项式系数具有下列性质． （1）除每行两端的 1 以外，每个数字都等于它肩上两个数之和. （2）在二项展开式中，与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等. （3）如果二项式的幂指数是 $2n$，那么二项展开式有（$2n+1$）项，且中间一项的二项式系数最大；如果二项式的幂指数是奇数 $2n-1$，那么二项展开式有 $2n$ 项，且中间两项的二项式系数相等并且最大．	通过这个探究活动，可以让学生直观地从二项式系数表中发现二项式系数相关性质，进而培养学生的观察、推理和归纳能力．
	【例 7】　求 $(1+x)^8$ 的展开式中二项式系数最大的项． **解**：已知二项式幂指数是偶数 8，展开式共有 9 项，依二项式系数的性质，中间项的二项式系数最大，所以要求的项为 $$T_5=\mathrm{C}_8^4x^4=70x^4.$$ **【例 8】**　求证：$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^m+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$. **证明**：在 $\left(a+b\right)^n=\mathrm{C}_n^0a^nb^0+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\cdots+\mathrm{C}_n^na^0b^n$ 中，令 $a=b=1$，则有 $$2^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^m+\cdots+\mathrm{C}_n^n.$$ 这就是说，二项展开式的各二项式系数的和等于 2^n. **【例 9】**　求证：在 $(a+b)^n$ 的展开式中，奇数项的二项式系数之和等于偶数项的二项式系数之和. **证明**：在 $\left(a+b\right)^n=\mathrm{C}_n^0a^nb^0+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\cdots+\mathrm{C}_n^na^0b^n$ 中，令 $a=1$，$b=-1$，则有 $$0=\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2-\mathrm{C}_n^3+\mathrm{C}_n^4-\mathrm{C}_n^5+\cdots,$$	使学生巩固二项式系数的性质，并理解赋值法解题的方法．

<table>
<tr>
<td></td>
<td>因此 $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots$.
即所证命题成立.
说明： 因为 $2^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^m+\cdots+C_n^n$，
所以 $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>小结</td>
<td>回顾本节课所学内容，回答下列问题.
1．这节课我们学习了二项式系数的哪些性质？
2．二项式定理可以解决哪些常见问题？

</td>
<td>回顾学习的过程，总结本节课的收获.</td>
</tr>
</table>