

4.2.2 双曲线的几何性质

【学情分析】

学生在基础模块中学习了直线与圆的方程，能够运用坐标法研究简单的几何图形，建立直线和圆的方程. 学生通过方程研究直线与圆的性质，能够感受数形结合的思想方法. 从学科核心素养来看，学生具备一定的数学运算、直观想象、逻辑推理的素养，但数学运算是学生的薄弱环节，教学时应注意低起点、慢慢来、多示范、多练习，循序渐进.

【教学目标】

- (1) 通过类比和观察，探究双曲线的几何性质，并学会运用这些基本事实进行一些简单的判断.
- (2) 通过对双曲线几何性质的观察、分析与计算，提升直观想象、逻辑推理、数学抽象素养，进一步提高利用数形结合的思想方法解决问题的能力.
- (3) 结合生活实例，感受数学来源于生活，运用于生活. 通过解决问题，培养学生独立思考、合作交流的能力.

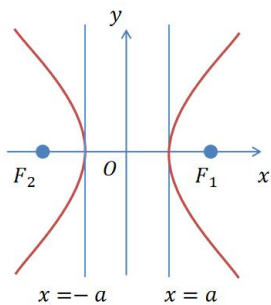
【教学重点和难点】

本节课的教学重点是双曲线的几何性质，教学难点是运用代数方法研究双曲线的几何性质.

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	通过提问复习基础知识. 1. 双曲线的标准方程是什么? 2. 椭圆有哪些几何性质? 3. 类比椭圆几何性质的研究，你能根据双曲线的标准方程来研究双曲线的一些几何性质吗?	回忆椭圆的几何性质的研究过程，启发学生思考双曲线几何性质的研究.

新课	设双曲线的方程是 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0).$ 1. 范围 由图可知，双曲线上点的坐标 (x, y)，对于任意实数 x, y 都满足 $\frac{x^2}{a^2} \geq 1, \text{ 即 } x^2 \geq a^2,$ 所以 $x \geq a$ 或 $x \leq -a$. 2. 对称性 如果 (x, y) 是方程的一组解，则 $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$ 都是方程的解，说明双曲线关于 y 轴、x 轴成轴对称，关于原点成中心对称. x 轴、y 轴是双曲线的对称轴，原点是双曲线的对称中心. 3. 顶点 (1) 在方程中，令 $y=0$，得 $x=-a$ 或 $x=a$，可知双曲线与 x 轴有两个交点，记作 $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$; (2) 在方程中，令 $x=0$，得 $-\frac{y^2}{b^2} = 1$，该方程无实数解，可知双曲线与 y 轴无交点. 双曲线与它的对称轴共有 2 个交点，即 A_1, A_2，这两个点都称为双曲线的顶点. 称线段 A_1A_2 为双曲线的实轴. 若记 $B_1(0, -b), B_2(0, b)$，则称线段 B_1B_2 为双曲线的虚轴. 于是 a, b 分别称为双曲线的半实轴长和半虚轴长. 特别地，实轴长与虚轴长相等的双曲线称为等轴双曲线.	类比椭圆的范围、对称性、顶点的研究，观察双曲线的图形得出结论. 利用代数方法，研究双曲线的范围、对称性、顶点、渐近线、离心率等性质.
-----------	---	---

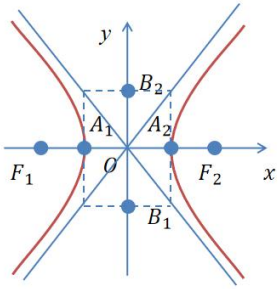


4. 渐近线

如图，我们把两条直线

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

称为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线.



注：双曲线的各支向外延伸时，与渐近线逐渐接近，但是永不相交.

5. 离心率

双曲线的半焦距与半实轴长的比 $e = \frac{c}{a}$ ，称为双曲线的离心率.

【探索研究】

(1) 根据双曲线离心率的定义，判断双曲线的离心率的取值范围.

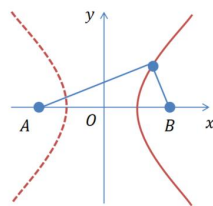
(2) 利用几何画板，研究双曲线离心率的大小与双曲线的形状有什么联系.

(3) 如果双曲线焦点在 y 轴上，则该双曲线的范围、对称性、顶点、渐近线、离心率中，哪些与焦点在 x 轴上的双曲线是有区别的？

方程形式	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
焦点	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
范围	$ x \geq a$	$ y \geq a$
顶点	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$
对称性	关于原点中心对称	
渐近线	$y = \pm \frac{b}{a} x$	$y = \pm \frac{a}{b} x$
离心率	$e = \frac{c}{a}$	

探究焦点在 y 轴上的双曲线的几何性质，并将其与焦点在 x 轴上的双曲线的几何性质进行对比.

	例 1 求双曲线 $5x^2 - 4y^2 = 20$ 的半实轴长、半虚轴长、焦点坐标、离心率、渐近线方程. 解: 把方程化为双曲线的标准方程 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$ 由此可知双曲线的焦点在 x 上, 半实轴长 $a = 2$, 半虚轴长 $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$. 所以双曲线焦点的坐标是 $(-3, 0), (3, 0)$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$.	运用双曲线的几何性质解题, 提升学生的数学运算能力.
	例 2 已知双曲线 C 的顶点为 A_1, A_2, 虚轴的一个端点为 B, 且 $\triangle BA_1A_2$ 是一个等边三角形, 求双曲线 C 的离心率. 解: 设 O 为坐标原点, 则 A_1A_2 的中点为 O, 且 $OA_1 = a, BO = b$, 由 $\triangle BA_1A_2$ 是等边三角形可知 $BO = \sqrt{3} OA_1$, 因此 $b = \sqrt{3}a$, 又因为 $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (\sqrt{3}a)^2 = 4a^2$, 所以 $c = 2a$, 从而 $e = \frac{c}{a} = 2$.	利用数形结合的思想方法解题, 培养学生的逻辑推理的能力.
	例 3 已知 A, B 两地相距 800 m, 在 A 地听到炮弹爆炸声比在 B 地晚 2 s, 且声速为 340 m/s, 求炮弹爆炸点的轨迹方程. 分析: 先根据题意判断轨迹的形状. 由声速及 A, B 两处听到炮弹爆炸声的时间差, 可知 A, B 两处与爆炸点的距离的差为定值, 所以爆炸点在以 A, B 为焦点的双曲线上. 因为爆炸点离 A 处比离 B 处远, 所以爆炸点应在靠近 B 处的双曲线的一支上. 解: 如图, 建立平面直角坐标系 xOy, 使 A, B 两点在 x 轴上, 并且原点 O 与	在利用坐标法解决实际问题的过程中, 培养学生的数学运算、逻辑推理、数学建模素养.



	线段 AB 的中点重合. 设炮弹爆炸点 P 的坐标为 (x, y), 则 $PA - PB = 340 \times 2 = 680$, 即 $2a = 680, a = 340$. 又 $AB = 800$, 所以 $2c = 800, c = 400, b^2 = c^2 - a^2 = 44\,400$. 因为 $PA - PB = 680 > 0$, 所以点 P 的轨迹是双曲线的右支, 因此 $x \geq 340$. 所以, 炮弹爆炸点的轨迹方程是 $\frac{x^2}{115\,600} - \frac{y^2}{44\,400} = 1 (x \geq 340).$	
小结	引导学生小结. (1) 双曲线的几何性质. (2) 利用方程推导双曲线的几何性质.	回顾学习的过程, 总结本节课的收获.