4.2.1　双曲线的标准方程

【学情分析】

学生在初中学习了平面几何，在前面的课程学习了椭圆的标准方程以及几何性质，因此有一定的研究圆锥曲线的基础，能顺应性地建构关于双曲线的方程及几何性质的知识体系. 通过类比、分析条件关系，学生可以自主推导双曲线的形成过程. 由于一部分学生平面几何知识基础较为薄弱，抽象概括能力不足，因此教学时应注意将直观与抽象相结合，提升学生利用数形结合思想解决问题的能力，并逐步提升学生的逻辑推理能力.

【教学目标】

（1）通过数学实验，提炼双曲线的概念，并学会运用双曲线的概念进行一些简单的分析和判断.

（2）通过对双曲线的概念和标准方程的探究，提升直观想象、逻辑推理、数学抽象等学科核心素养.

（3）结合生活实例，感受数学来源于生活，运用于生活. 通过解决问题，培养学生独立思考、交流合作的能力.

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是双曲线的定义和标准方程，教学难点是推导的证明过程.

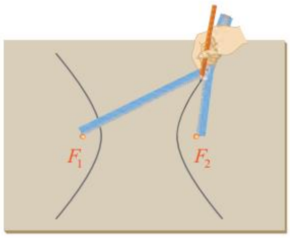
【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	通过提问，复习椭圆的定义及标准方程. （1）平面内与两个定点F_1，F_2的距离的和等于常数（大于$\|F_1F_2\|$）的点的轨迹是椭圆. （2）椭圆的标准方程、焦点坐标以及a，b，c的关系.	回忆椭圆的定义及标准方程，为双曲线的学习做铺垫.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">新课</td>
<td>

【问题 1】

数学实验：取一条拉链，固定在画板上的两点，拉动拉链，拉链头运动的轨迹是什么图形？



如图所示，将拉链的一边截去一部分，并将拉链的两端用图钉固定在画板的F_1与F_2处，将笔尖放置在拉锁处，随着拉链沿不同的方向逐渐拉开，笔尖将作出一条曲线；调换拉链的两端，按照同样的操作，笔尖也将作出一条曲线．最终作出的图形是双曲线的一部分，其中每一条曲线都称为双曲线的一支．

【预案】

提问：我们知道，平面内与两个定点F_1，F_2的距离的和等于常数（大于$|F_1F_2|$）的点的轨迹是椭圆．我们思考：平面内与两个定点的距离的差等于常数的点的轨迹是什么？

（1）这个平面图形就是双曲线，而这种作双曲线的方法实际上验证了双曲线定义中的点 P 一定存在而且有无数多个．

追问：那么，从数学上能不能证明这一点呢？

（2）同椭圆的情形一样，下面我们用坐标法来探讨上述问题，并求出双曲线的标准方程．

1．双曲线的定义

平面内与两个定点F_1，F_2的距离的差的绝对值是常数（小于$|F_1F_2|$且不等于 0）的点的轨迹称为**双曲线**．这两个定点称为双曲线的**焦点**，两焦点的距离称为双曲线的**焦距**．

</td>
<td>

通过用实物创设情境，激发学生动手实践的兴趣．

从提问互动中，引导学生思考并学习双曲线的定义．

</td>
</tr>
<tr>
<td>

【问题 2】

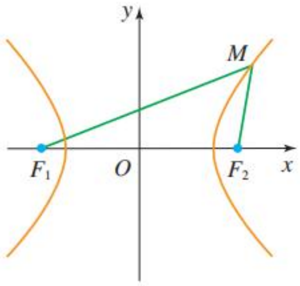
通过上述活动，你能推导双曲线的标准方程吗？

取过焦点F_1，F_2的直线为x轴，线段F_1F_2的垂直平分线为y轴，建立平面直角坐标系（如下图）．

</td>
<td>

从实物到几何图形，培养

</td>
</tr>
</table>



设$M(x,y)$是双曲线上的任意一点，双曲线的焦距是$2c\ (c>0)$，那么F_1，F_2的坐标分别是$(-c,0)$，$(c,0)$．又设点M与F_1、F_2的距离的差的绝对值等于常数$2a$.则点M满足条件

$$|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a.$$

由题意可知，

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$|MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

得方程

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

化简，得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

由双曲线的定义可知$2c>2a>0$，即$c>a>0$，所以$c^2-a^2>0$.

设$c^2-a^2=b^2(b>0)$，代入上式得

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

两边除以a^2b^2，得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0). \qquad ①$$

反之，我们可以证明，如果点$M(x,y)$的坐标满足方程①，那么点M一定在双曲线上．因此，方程①是双曲线的方程．

2．双曲线的标准方程

我们把焦点在x轴上的双曲线的标准方程记为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0).$$

学生的抽象思维能力．从文字描述到图形和符号，提升学生的作图能力．

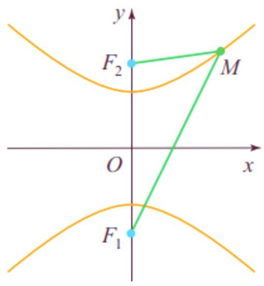
<table>
<tr><td></td><td>它的焦点是 $F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)$，且$c^2=a^2+b^2$.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

【问题 3】

设双曲线的焦点为F_1和F_2，焦距为 $2c$，而且双曲线上的动点M满足

$$||MF_1|-|MF_2||=2a .$$

其中$c>a>0$．以F_1F_2所在直线为y轴，线段F_1F_2的垂直平分线为x轴，建立平面直角坐标系， 如图所示．



提问：

（1）双曲线焦点的坐标分别是什么？

（2）能否通过①式来得到该双曲线方程的形式？

推论：我们把焦点在y轴上的双曲线的标准方程记为

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0，b>0).$$

它的焦点是 $F_1(0，-c)$，$F_2(0，c)$，且$b^2=c^2-a^2$.

</td><td>类比推理，提升学生的逻辑思维能力．</td></tr>
<tr><td></td><td>

例 已知两点$F_1(-5，0)$和$F_2(5，0)$,求与它们的距离差的绝对值等于 6 的动点的轨迹方程．

解：按定义，所求动点的轨迹是双曲线，因为$c=5$， $a=3$，所以$b^2=c^2-a^2=5^2-3^2=4^2$.

因此所求方程是

$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1，即 \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 .$$

</td><td>直接利用双曲线的定义解决问题，培养学生的发散思维能力．</td></tr>
<tr><td></td><td>

练习

1．写出适合下列条件的双曲线的标准方程：

</td><td>巩固所学知识，加深对相</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

（1）$a=2$，焦点为$F_1(-3，0)$和$F_2(3，0)$；

（2）$a=2$，焦点为$F_1(0，-3)$和$F_2(0，3)$；

（3）$a=4$，$b=3$，焦点在y轴上；

（4）$a=2\sqrt{5}$，经过点$A(2，-5)$，焦点在y轴上．

2．求下列双曲线的焦点的坐标与焦距：

$(1)x^2-y^2=4$；

$(2)y^2-x^2=1$；

$(3)\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$；

（4）$9y^2-16x^2=144$．

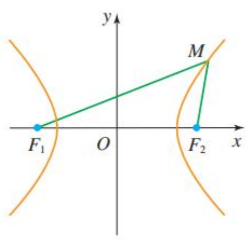
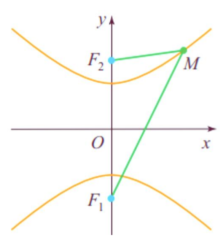
3．在坐标纸上，画出双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$．

4．判断下列双曲线的焦点在哪一条坐标轴上：

$(1)\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$；　　（2）$9y^2-16x^2=144$．

</td>
<td>关概念的理解，提高解决数学问题的能力．</td>
</tr>
<tr>
<td>小结</td>
<td>

引导学生小结．

<table>
<tr><td>焦点位置</td><td>焦点在x轴上</td><td>焦点在y轴上</td></tr>
<tr><td>标准方程</td><td>$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$</td><td>$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$</td></tr>
<tr><td>图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>焦点</td><td>$F_1(-c，0)$，
$F_2(c，0)$</td><td>$F_1(0，-c)$，
$F_2(0，c)$</td></tr>
<tr><td>焦距</td><td colspan="2">$|F_1F_2|=2c$</td></tr>
<tr><td>a，b，c
的关系</td><td colspan="2">$c^2=a^2+b^2$</td></tr>
</table>

</td>
<td>回顾学习的过程，总结本节课的收获．</td>
</tr>
</table>