4.1.2　椭圆的几何性质

【学情分析】

学生在前面的课程中学习了椭圆的概念及其标准方程，因此能从椭圆图形和椭圆标准方程的结构特征等方面探究椭圆的几何性质．从学科核心素养来看，学生具备一定的数学运算、直观想象、逻辑推理、数学抽象等素养. 在教学过程中，教师应注重引导学生将原有的知识与推理过程相联系，从多个角度联想、发现和解决问题，得出椭圆的几何性质，从而提高学生发现问题、分析问题、解决问题的能力.

【教学目标】

（1）掌握椭圆的性质，会求椭圆的长轴长、短轴长、离心率、顶点坐标.

（2）通过椭圆的标准方程探究其几何性质及应用，培养学生直观想象素养和数学抽象素养，提高学生利用数形结合思想解决问题的能力.

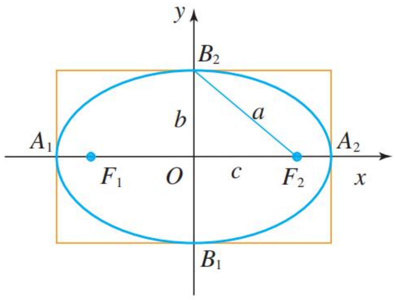
（3）善于发现数学在生活、科技上的实际应用.

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是椭圆的几何性质及其对图形的影响，教学难点是椭圆的几何性质的应用.

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	一般地，如果椭圆的标准方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.　　① 你能根据方程①来研究椭圆的一些几何性质吗？	回忆椭圆的标准方程，启发学生思考其图形性质.

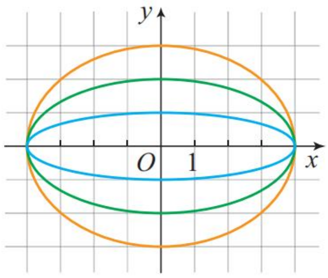
新课	**1．范围** 由方程①可知，椭圆上点的坐标$(x，y)$都满足不等式 $\frac{x^2}{a^2} \le 1$，$\frac{y^2}{b^2} \le 1$，即$x^2 \le a^2$，$y^2 \le b^2$，所以$-a \le x \le a$，$-b \le y \le b$，这说明椭圆位于直线 $x=\pm a$ 和 $y=\pm b$ 所围成的矩形内（如图）．  **2．对称性** 如果$(x，y)$是方程①的一组解，则不难看出，$(-x，y)$，$(x，-y)$都是方程的解，这说明椭圆关于 x 轴、y 轴成轴对称，关于原点成中心对称．因此，坐标轴是椭圆的对称轴，原点是椭圆的对称中心．椭圆的对称中心称为椭圆的中心，我们只讨论中心在原点的椭圆． **3．顶点** 在椭圆的标准方程中，令 $x=0$，得 $y=\pm b$．这说明 B_1（0，$-b$），B_2（0，b）是椭圆和 y 轴的两个交点．同理，令 $y=0$，得 $x=\pm a$，这说明 A_1（$-a$，0），A_2（a，0）是椭圆与 x 轴的两个交点．因为 x 轴、y 轴是椭圆的对称轴，所以椭圆和它的对称轴有四个交点，这四个交点称为椭圆的顶点． 线段 A_1A_2，B_1B_2 分别称为椭圆的长轴和短轴．它们的长分别等于 $2a$ 和 $2b$，a 和 b 分别称为椭圆的半长轴长和半短轴长． **4．离心率** 一般地，椭圆的半焦距与半长轴长的比$e=\frac{c}{a}$ 称为椭圆的离心率． **提问 1：**根据椭圆离心率的定义，判断椭圆离心率的取值范	引导学生通过观察图形，说出椭圆的范围． 从图形直观地认识椭圆的对称性． 引导学生认识椭圆的顶点、长轴和短轴．

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
围.

$$0 < c < a \Rightarrow 0 < e < 1.$$

提问 2: 想一想椭圆离心率的大小与椭圆的形状有什么联系，并尝试证明.

预案： 引导学生观察下图，说出离心率与椭圆形状变化的关系.



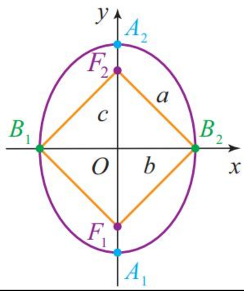
如果 $a=b$，则 $c=0$，两个焦点重合，这时椭圆的标准方程就变为圆的方程 $x^2+y^2=a^2$.

提问 3： 如果椭圆的标准方程是

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)，$$

那么这个椭圆的范围、对称性、顶点和离心率中，哪些与焦点在 x 轴上的椭圆是有区别的？

预案： 引导学生观察下图说出区别.



</td>
<td>可借助信息化技术手段引导学生理解离心率的概念，并通过观察动画了解离心率与椭圆形状的关系.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>

【例题分析】

例 1　求椭圆 $16x^2+25y^2=400$ 的长轴长、短轴长、离心率、焦点坐标及顶点坐标.

解： 把已知方程化成椭圆的标准方程：

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1，$$

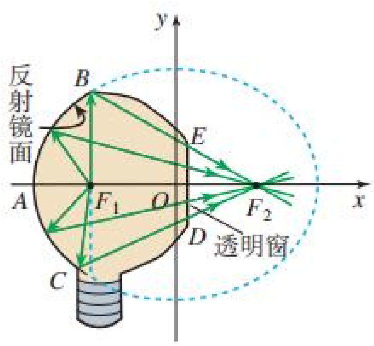
得 $a=5$，$b=4$，$c=3$.
</td>
<td>引导学生根据已知条件形成解题思路，完成练习.</td>
</tr>
</table>

因此，椭圆的长轴和短轴的长分别是 $2a=10$ 和 $2b=8$，离心率 $e=\frac{3}{5}$，两个焦点的坐标分别是（-3，0）和（3，0），它的 4 个顶点坐标分别是（-5，0），（5，0），（0，-4）和（0，4）.

例 2　已知椭圆 C 的焦点为 F_1，F_2，短轴的一个端点为 B，且 $\triangle BF_1F_2$ 是一个等边三角形，求椭圆 C 的离心率.

解：因为 $|BF_1|=|BF_2|=a$，$|F_1F_2|=2c$，所以依据题意可知 $a=2c$，从而有 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

例 3　如图所示，一种电影放映灯的反射镜面是旋转椭圆面（椭圆绕其对称轴旋转一周形成的曲面）的一部分．过对称轴的截口 BAC 是椭圆的一部分，灯丝位于椭圆的一个焦点 F_1 上，片门位于另一个焦点 F_2 上．由椭圆一个焦点 F_1 发出的光线，经过旋转椭圆面反射后集中到另一个焦点 F_2．已知 $BF_1\perp F_1F_2$，$|F_1B|=2.8$ cm，$|F_1F_2|=4.5$ cm．试建立适当的平面直角坐标系，求截口 BAC 所在椭圆的方程（精确到 0.1 cm）.



解：建立如图所示的平面直角坐标系，设所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

在 $Rt\triangle BF_1F_2$ 中，$|F_2B|=\sqrt{|F_1B|^2+|F_1F_2|^2}=\sqrt{2.8^2+4.5^2}$.

由椭圆的性质知，$|F_1B|+|F_2B|=2a$，所以

$a=\frac{1}{2}(|F_1B|+|F_2B|)=\frac{1}{2}(2.8+\sqrt{2.8^2+4.5^2})\approx 4.1$，

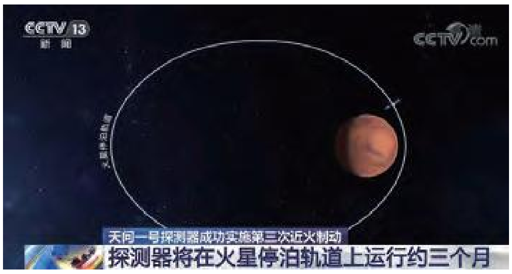
$b=\sqrt{a^2-c^2}\approx 3.4$.

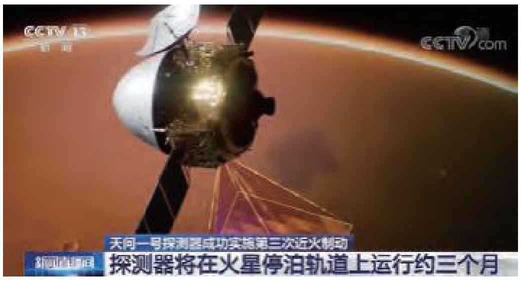
所以，所求的椭圆方程为

<table>
<tr><td></td><td>$$\frac{x^2}{4.1^2}+\frac{y^2}{3.4^2}=1.$$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

【知识拓展】

央视网消息：2021 年 2 月 24 日早上 6 时 29 分，我国首次火星探测任务天问一号探测器成功实施第三次近火制动，进入火星停泊轨道. 天问一号探测器今天进入的火星停泊轨道是一条距离火星最近 280 千米、最远 5.9 万千米的椭圆形轨道，环绕一周需 2 个火星日.





根据上面的新闻报道，请你使用 GeoGebra 或几何画板软件绘制出天问一号的停泊轨道，并试着求出停泊轨道的一个近似的椭圆方程.

</td><td>引导学生使用信息化技术手段并运用数学知识解决实际问题，培养学生发散思维的能力.</td></tr>
<tr><td>小结</td><td>引导学生小结.
（1）椭圆的范围、对称性、顶点、离心率.
（2）利用椭圆的几何性质解决实际问题的方法.</td><td>回顾学习的过程，总结本节课的收获.</td></tr>
</table>