4.1.1　椭圆的标准方程

【学情分析】

学生在初中学习了平面几何，前面的课程又学习了直线与圆的方程，对圆的要素及标准方程已有一定了解. 从知识层面看，学生已经掌握了一些椭圆图形的概念与实例. 从学习能力看，学生已具备一定的观察事物的能力、抽象的能力和语言转换的能力，积累了一些研究问题的经验.

【教学目标】

（1）了解椭圆的定义及标准方程，会利用椭圆的相关性质求椭圆的标准方程.

（2）通过椭圆概念的引入与椭圆方程的推导过程，培养学生分析、探索问题的能力，熟练掌握解决解析几何问题的方法——坐标法.

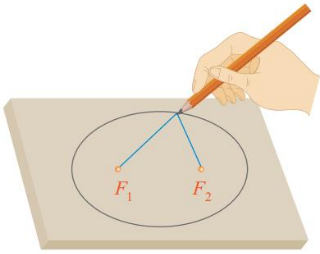
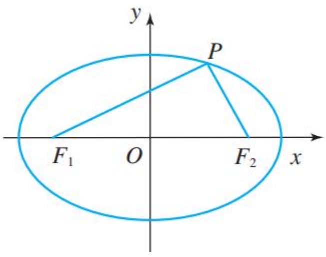
（3）结合生活实例，感受数学来源于生活，运用于生活. 通过解决问题，培养学生独立思考、交流合作的能力.

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是椭圆的概念及椭圆标准方程的两种形式，教学难点是椭圆标准方程的建立和推导.

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
导入	在日常生活中，我们发现很多椭圆的形象（如图）. 在数学中，圆是平面内到圆心的距离等于半径的点的集合. 圆上任意一点到圆心的距离都等于半径，那么椭圆在数学上的定义是什么呢？  	回忆圆的概念，引发学生思考椭圆的定义.

新课	事实上，如果F_1，F_2是平面内的两个定点，a是一个常数，且 $2a > \|F_1F_2\|$，则平面内满足 $$\|PF_1\| + \|PF_2\| = 2a$$ 的动点 P 的轨迹称为**椭圆**，其中，两个定点F_1，F_2称为**椭圆的焦点**，两个焦点之间的距离$\|F_1F_2\|$称为**椭圆的焦距**．另外，椭圆可以通过用平面截圆锥面得到，因此椭圆是一种圆锥曲线． **【探索研究 1】** 你能利用日常生活中的物品作出一个椭圆吗？ 如图所示，在水平的画板上取两上定点F_1和F_2，在这两个点上都钉上一个图钉，将一条长度大于$\|F_1F_2\|$的细绳的两端固定在两个图钉上，用笔尖把细绳拉紧， 并使笔尖在画板上慢慢移动一周，则画出的图形是一个椭圆． 这种作椭圆的方法实际上是验证了椭圆定义中的点 P 一定存在而且有无数多个．那么，从数学上能不能证明呢？ 不难想到，我们可以通过坐标法来探讨上述满足条件的点 P 是否存在． 取过焦点F_1，F_2的直线为x轴，线段F_1F_2的垂直平分线为y轴，建立平面直角坐标系（如图）． 设 $P(x, y)$是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为 $2c(c > 0)$，P 与F_1和F_2的距离的和等于正常数 $2a$，则F_1，F_2的坐标分别是(-c，0)，(c，0)． 由已知可得 $$\|PF_1\| + \|PF_2\| = 2a,$$ $$\|PF_1\| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$	理解椭圆的定义及相关概念． 通过实物创设情境，激发学生动手实践的兴趣． 用坐标法探讨满足点 P 的条件． 建立平面直角坐标系． 由椭圆的概念得出方程．

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$$|PF_2| = \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

得方程$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$.

将这个方程移项，两边平方，得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

整理，得

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

两边再平方，得

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

整理，得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

由椭圆定义可知 $2a>2c$，即$a>c$，所以$a^2-c^2>0$.

设$a^2-c^2=b^2(b>0)$，得

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

两边除以a^2b^2，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0). \quad ①$$

反之，我们可以证明，如果点 $P(x，y)$的坐标满足方程 ①，那么点 P 一定在椭圆上．因此，方程 ①是椭圆的方程．通常把这个方程称为**焦点在x轴上的椭圆的标准方程**．它的焦点是$F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)$，且$c^2=a^2-b^2$.

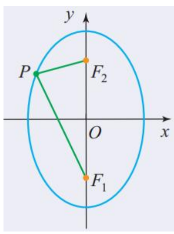
</td>
<td>

整理方程.

得出椭圆的标准方程.

</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>

【探索研究 2】 设椭圆的焦点为F_1，F_2，焦距为 $2c$，而且椭圆上的动点 P 满足



$$|PF_1|+|PF_2|=2a,$$

其中$a>c>0$．以F_1F_2所在直线为y轴，线段F_1F_2的垂直平分线为x轴，建立平面直角坐标系，如图所示．此时：

（1）椭圆焦点的坐标分别是什么？

（2）能否通过①式来得到该椭圆方程的形式？

显然，此时椭圆的焦点在y轴上，焦点是$F_1(0，-c)$，$F_2(0，c)$（如图），而且只要将方程①的x，y互换，就可以得到上述椭

</td>
<td>

推导出焦点

</td>
</tr>
</table>

	圆的方程，为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$． ② 其中$b^2=a^2-c^2$．这个方程通常称为**焦点在$y$轴上的椭圆的标准方程**．	在y轴上的椭圆的标准方程．
	【例 1】 平面内两个定点的距离是 8，写出到这两个定点距离的和是 10 的动点的轨迹方程． **解**：这个轨迹是一个椭圆，两个定点是焦点，用F_1，F_2表示．取过点F_1和F_2的直线为x轴，线段F_1F_2的垂直平分线为y轴． 因为$2a=10$，$2c=8$，所以$a=5$，$c=4$，$b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=9$，即$b=3$．因此，这个椭圆的标准方程是$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$，即$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$．	由椭圆的相关性质求出椭圆的标准方程．
	【例 2】 分别求椭圆C_1:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$与椭圆$C_2$:$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$的焦点． **解**：因为$4>3$，所以椭圆$C_1$的焦点在$x$轴上，椭圆$C_2$的焦点在$y$轴上． $$a^2=4，b^2=3，c=\sqrt{a^2-b^2}=1.$$ 所以椭圆C_1的两个焦点分别为$(-1，0)$和$(1，0)$，椭圆C_2的两个焦点分别为$(0，-1)$和$(0，1)$．	由椭圆的标准方程求出椭圆的焦点．
	【练习】 1．写出适合下列条件的椭圆的标准方程： （1）$a=4$，焦点为$F_1(-3，0)$，$F_2(3，0)$； （2）$a=4$，焦点为$F_1(0，-3)$，$F_2(0，3)$； （3）$b=1$，焦点为$F_1(-\sqrt{15}，0)$，$F_2(\sqrt{15}，0)$； （4）焦点在 y 轴上，且$a=6$，焦距为$4\sqrt{2}$． 2．求下列椭圆的焦点和焦距： （1）$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$；	掌握所学知识点．

	（2）$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$； （3）$2x^2+\mathrm{y}^2=8$； （4）$3x^2+4\mathrm{y}^2=12$． 3．已知椭圆的焦点在$x$轴上，求满足下列条件的椭圆的标准方程： （1）$a:b=5:3$，焦距等于 16； （2）通过点(4，3)和(6，2)； （3）焦距为$\frac{4}{3}\sqrt{33}$，且通过点(2，1)． 4．判断下列椭圆的焦点在哪一条坐标轴上： （1）$4x^2+9\mathrm{y}^2=144$； （2）$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{121}=1$．	
小结	引导学生小结. （1）椭圆的定义及标准方程. （2）利用椭圆的相关性质求椭圆的标准方程.	回顾学习的过程，总结本节课的收获.