

### 3.4.3 中点公式和距离公式

#### 【学情分析】

学生在本章前几节学习了平面向量的线性运算、平面向量的内积、平面向量的直角坐标，因此可以综合应用所学知识构建本节课的新知识：应用平面向量的线性运算及平面向量的直角坐标推导出线段中点坐标公式；应用平面向量的内积及平面向量的直角坐标推导出两点间的距离公式。学生具备一定的直观想象、逻辑推理、数学抽象的素养，但由于平面向量是学生以前没有接触过的新知识，因此学生对平面向量的相关概念、性质、运算等的接受和熟悉需要一定的过程。教学时，需注意低起点、慢慢来、多示范、多练习。

#### 【教学目标】

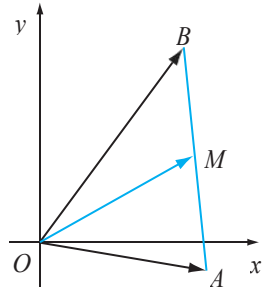
- (1) 掌握中点公式和距离公式，并学会应用公式进行计算，解决问题。
- (2) 通过中点公式和距离公式的推导和应用，提升数学运算、直观想象、逻辑推理、数学抽象等学科核心素养。
- (3) 体验应用向量坐标将几何问题转换为代数问题的思维过程，感受数形结合的思想方法。

#### 【教学重点和难点】

本节课的教学重点是中点公式和距离公式的推导及应用，教学难点是推导中点公式和距离公式。

#### 【教学过程】

| 教学环节 | 教学内容                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 设计意图                                         |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 复习   | <p>提问，引导学生思考回答。</p> <p>1. 向量 <math>\boldsymbol{a}</math> 与向量 <math>\boldsymbol{b}</math> 的内积定义为：</p> $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \underline{\hspace{2cm}};$ <p>2. 根据内积定义可得：</p> <p>(1) <math>\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \underline{\hspace{2cm}};</math></p> <p>(2) <math> \boldsymbol{a}  = \underline{\hspace{2cm}}.</math></p> <p>3. 若点 <math>A</math> 的坐标为 <math>(x, y)</math>，<math>O</math> 为坐标原点，则向量 <math>\overrightarrow{OA}</math> 的坐</p> | <p>通过提问启发学生思考，回顾平面向量的内积、直角坐标及其运算，为新课做准备。</p> |

|                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                              |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
|                  | <p>标为 _____.</p> <p>4. 如果向量 <math>\mathbf{a}=(x_1, y_1)</math>, 向量 <math>\mathbf{b}=(x_2, y_2)</math>, 用坐标表示下列向量计算结果:</p> <p>(1) <math>\mathbf{a}+\mathbf{b}=\rule{1.5cm}{0.4pt}</math>;</p> <p>(2) <math>\mathbf{a}-\mathbf{b}=\rule{1.5cm}{0.4pt}</math>;</p> <p>(3) <math>\lambda\mathbf{a}=\rule{1.5cm}{0.4pt}</math>;</p> <p>(4) <math>\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=\rule{1.5cm}{0.4pt}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                              |
| <p><b>新课</b></p> | <p>已知点 <math>A(x_1, y_1)</math> 和点 <math>B(x_2, y_2)</math>, 如何求线段 <math>AB</math> 的中点坐标?</p> <p><b>解:</b> 如图所示, 设线段 <math>AB</math> 的中点为 <math>M(x, y)</math>, 则 <math>\overrightarrow{OM}=(x, y)</math>.</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="flex: 1;"> <math display="block">  \begin{aligned}  \overrightarrow{OM} &amp;= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\  &amp;= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\  &amp;= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\  &amp;= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).  \end{aligned}  </math> </div> <div style="flex: 1; text-align: center;">  </div> </div> <p>故有</p> $(x, y) = \frac{1}{2}[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right),$ <p>即</p> $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$ | <p>提出问题, 启发学生思考.</p> <p>展示应用已学知识解决问题的步骤.</p> |
|                  | <p>一般地, 设 <math>A(x_1, y_1)</math>, <math>B(x_2, y_2)</math> 为平面内任意两点, 则线段 <math>AB</math> 的中点 <math>M(x, y)</math> 的坐标为</p> $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$ <p>这就是线段中点坐标的计算公式, 简称<b>中点公式</b>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <p>引导学生归纳总结, 得到新知.</p>                       |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                           |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
|  | <p>若点 <math>A(1, 3)</math>, <math>B(5, -7)</math>, 则线段 <math>AB</math> 的中点坐标是什么?</p>                                                                                                                                                                                                                                   | <p>及时巩固新知, 加深理解和记忆.</p>                                   |
|  | <p><b>例 1</b> 求点 <math>A(2, 7)</math> 关于点 <math>M(5, -2)</math> 的对称点 <math>A'</math> 的坐标.</p> <p><b>解:</b> 设点 <math>A'</math> 的坐标是 <math>(x, y)</math>, 由中点公式知</p> $\frac{2+x}{2} = 5, \frac{7+y}{2} = -2,$ <p>解得 <math>x = 8</math>, <math>y = -11</math>.</p> <p>所以点 <math>A'</math> 的坐标是 <math>(8, -11)</math>.</p> | <p>通过例题, 强化学生对中点公式的应用.</p>                                |
|  | <p>已知向量 <math>\mathbf{a} = (x, y)</math>, 向量长度 <math> \mathbf{a} </math> 可以用坐标表示吗?</p> <p><b>解:</b> 因为 <math> \mathbf{a} ^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = x^2 + y^2</math>, 所以 <math> \mathbf{a}  = \sqrt{x^2 + y^2}</math>.</p>                                                                                     | <p>提出问题, 启发学生思考.</p> <p>引导学生应用向量内积及向量直角坐标的计算公式进行问题探究.</p> |
|  | <p>已知向量 <math>\mathbf{a} = (x, y)</math>, 则向量长度为 <math> \mathbf{a}  = \sqrt{x^2 + y^2}</math>.</p> <p>这就是向量长度的计算公式.</p>                                                                                                                                                                                                | <p>引导学生归纳总结, 得到新知.</p>                                    |
|  | <p>若平面内两点 <math>A(x_1, y_1)</math>, <math>B(x_2, y_2)</math>, 则 <math>A, B</math> 两点间的距离可以用坐标表示吗?</p> <p><b>解:</b> 由题可知, <math>\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)</math>, 利用向量长度计算公式可得</p> $ \overrightarrow{AB}  = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$                                                   | <p>提出问题, 启发学生思考.</p> <p>引导学生应用新知进一步探究.</p>                |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                       |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
|  | <p>若平面内两点 <math>A(x_1, y_1)</math>, <math>B(x_2, y_2)</math>, 则 <math>A, B</math> 两点间的距离为 <math> \overrightarrow{AB}  = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}</math>.</p> <p>这就是平面内两点间的距离公式.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <p>引导学生归纳总结, 得到新知.</p>                |
|  | <p><b>例 2</b> 已知向量 <math>\mathbf{a} = (4, -3)</math>, <math>\mathbf{b} = (-6, 8)</math>, 求:</p> <p>(1) <math> \mathbf{a}  +  \mathbf{b} </math>; (2) <math> \mathbf{a} + \mathbf{b} </math>.</p> <p><b>解:</b> (1)</p> $ \mathbf{a}  +  \mathbf{b}  = \sqrt{4^2 + (-3)^2} + \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 5 + 10 = 15.$ <p>(2) 因为 <math>\mathbf{a} + \mathbf{b} = (4, -3) + (-6, 8) = (-2, 5)</math>,</p> $\text{所以 }  \mathbf{a} + \mathbf{b}  = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}.$                                                                                                                                                                                                                           | <p>通过例题, 进一步巩固学生对向量长度计算公式的理解和记忆.</p>  |
|  | <p><b>例 3</b> 已知点 <math>A(1, 2)</math>, <math>B(2, 3)</math>, <math>C(2, 1)</math>, 求 <math>\triangle ABC</math> 的中线 <math>AD</math> 的长度.</p> <p><b>解:</b> 设点 <math>D(x, y)</math>, 则 <math>x = \frac{2+2}{2} = 2</math>, <math>y = \frac{1+3}{2} = 2</math>, 因此点 <math>D</math> 的坐标为 <math>(2, 2)</math>.</p> <p>由平面内两点间的距离公式, 得</p> $ \overrightarrow{AD}  = \sqrt{(2-1)^2 + (2-2)^2} = 1,$ <p>故中线 <math>AD</math> 的长度为 1.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                     | <p>通过例题, 进一步巩固学生对中点公式和距离公式的理解和记忆.</p> |
|  | <p><b>例 4</b> 设向量 <math>\mathbf{a} = (3, -1)</math>, <math>\mathbf{b} = (1, -2)</math>, 求 <math>\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle</math>.</p> <p><b>解:</b> 因为 <math>\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \times 1 + (-1) \times (-2) = 5</math>,</p> $ \mathbf{a}  = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10},$ $ \mathbf{b}  = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5},$ $\text{所以 } \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ \mathbf{a}   \mathbf{b} } = \frac{5}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$ <p>又因为 <math>0 \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq \pi</math>, 所以 <math>\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\pi}{4}</math>.</p> | <p>通过例题, 进一步帮助学生掌握向量长度计算公式的应用.</p>    |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                  |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
|    | <p>1. 已知 <math>A, B</math> 两点的坐标, 求线段 <math>AB</math> 的中点坐标:</p> <p>(1) <math>A(7, -2), B(-1, 3)</math>;</p> <p>(2) <math>A(0, -4), B(5, 0)</math>;</p> <p>(3) <math>A(-2, 0), B(5, 0)</math>;</p> <p>(4) <math>A(-1, 5), B(-11, 9)</math>.</p> <p>2. 求点 <math>A(-2, 3)</math> 关于点 <math>M(1, 1)</math> 的对称点 <math>A'</math> 的坐标.</p> <p>3. 已知向量 <math>\mathbf{a}=(-2, -1), \mathbf{b}=(2, -4)</math>, 求 <math> \mathbf{a} - \mathbf{b} ,  \mathbf{a}-\mathbf{b} </math>.</p> <p>4. 求下列各组 <math>A, B</math> 两点之间的距离:</p> <p>(1) <math>A(2, 6), B(1, 3)</math>;</p> <p>(2) <math>A(6, 1), B(-6, -4)</math>;</p> <p>(3) <math>A(-7, 8), B(1, -7)</math>.</p> <p>(4) <math>A(1, -2), B(5, 2)</math>.</p> | <p>帮助学生及时巩固新知, 根据学生掌握情况查漏补缺.</p> |
| 小结 | <p>引导学生小结.</p> <p>本节课学习了哪些公式?</p> <p>1. 线段中点坐标的计算公式.</p> <p>2. 向量长度的计算公式.</p> <p>3. 平面内两点间的距离公式.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p>引导学生回顾、总结本节课的收获.</p>          |
| 作业 | <p>1. 书面作业: 教材第 96 页, 习题第 1, 2 题.</p> <p>2. 查漏补缺: 根据个人情况进行复习与回顾.</p> <p>3. 拓展作业: 阅读教材“阅读材料”.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <p>及时复习巩固所学知识, 继续探究延伸.</p>       |