3.3　平面向量的内积

【学情分析】

学生在初中物理学习了功的概念，前面的课程又学习了平面向量的概念、平面向量的线性运算，因此学生在教师的引导下可以顺应性地进行知识体系建构，即从平面向量的线性运算到平面向量的内积. 从学科核心素养来看，学生具备一定的直观想象、逻辑推理、数学抽象素养，但由于对平面向量的学习还不够深入，抽象思维始终是学生的薄弱环节. 教学时，需注意低起点、慢慢来、多示范、多练习，逐步提升学生抽象思维的能力.

【教学目标】

（1）能够叙述两个非零向量夹角的概念以及向量内积的定义.

（2）会根据向量内积的定义求内积、夹角以及判断向量的垂直.

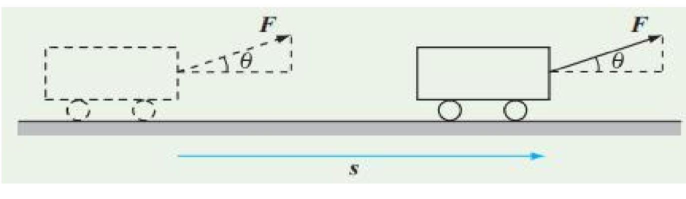
（3）会应用向量内积的运算律及性质进行内积的运算.

（4）结合生活实例，感受数学来源于生活，运用于生活. 通过解决问题，培养学生独立思考、交流合作的品质.

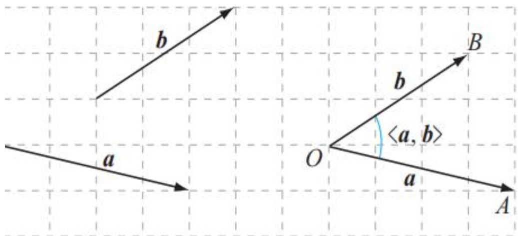
【教学重点和难点】

本节课的教学重点是向量内积的定义，教学难点是对向量内积的定义、运算律及性质的理解.

【教学过程】

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td>引入</td><td>【问题情境】　在力学中，一个物体受到力的作用，并在力的方向上产生了一段位移，这个力就对物体做了功. 如果一个物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生位移 $\boldsymbol{s}$，如图所示.


讨论：（1）如何计算这个力所做的功？</td><td>为学习向量的内积做铺垫.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>（2）W，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 这三个量中，哪些是数量，哪些是向量？
讨论“功的计算”时，教师要提醒学生注意由力和位移两个向量确定的功，这个结果是一个数量，有别于以前所熟悉的数的乘法结果.</td><td></td></tr>
<tr><td>新课</td><td>（一）两个非零向量夹角的概念与向量的内积
1．两个非零向量夹角的概念
如下图所示，已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$. 一般地，规定 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$.


当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；
当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pi$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向；
当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.
想一想：如图，等边三角形 ABC 中，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角是多少？向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角是多少？
注意：找两个向量的夹角时，这两个向量必须起点相同.
2．向量内积的定义
已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角是 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积（数量积或点积），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.
规定：零向量与任意向量 $\boldsymbol{a}$ 的内积为 0，即 $\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$.
说明：（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的结果是一个实数，可以为正数、负数、零.
（2）符号“·”在向量运算中不是乘号，既不能省略，也</td><td>明确概念的实质，以具体的例子让学生辨析两个向量夹角的定义.

让学生理解两个非零向量内积与</td></tr>
</table>

	不能用“×”代替． 【例 1】已知$\|\boldsymbol{a}\|=3$，$\|\boldsymbol{b}\|=6$，求下列各种情况下 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值： （1）$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=60°$；　（2）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；　（3）$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$． 【分析】应用内积定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$求值． 【解】（1）因为$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=60°$， 所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=3\times6\times\cos60°=9$. （2）因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=90°$， 于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=3\times6\times\cos90°=0$. （3）因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反． 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同时，$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=0°$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=3\times6\times\cos0°=18$； 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反时，$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=180°$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=3\times6\times\cos180°=-18$.	两个数的乘积的本质区别． 及时巩固向量内积的计算公式，让学生学以致用．
	（二）两个非零向量内积的运算定律 引导学生小组合作探究：通过向量内积的定义，证明交换律和数乘结合律．教师利用内积的定义证明分配律，并用具体数据说明向量内积的运算并不满足结合律．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 和实数λ，则： (1)交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$； (2)数乘结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$； (3)分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$. **说明**：一般地，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$． **（三）两个非零向量内积的性质** 引导学生讨论：根据向量内积的定义，完成下面的问题． （1）如果 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}$=____________. （2）如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$=____________，反之也成立． （3）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$=____________. （4）$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$=____________.	让学生深刻理解向量内积的运算与数量运算的本质区别． 让学生掌握向量内积的运算公式，进一步理解内积的性质．

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

（四）典型例题分析

【例 2】已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=60^\circ$，求：

（1）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；　　　（2）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

【分析】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=2\times1\times\cos60^\circ=2\times1\times\dfrac{1}{2}=1$.

【解】（1）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$

$=4-1=3$.

（2）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$

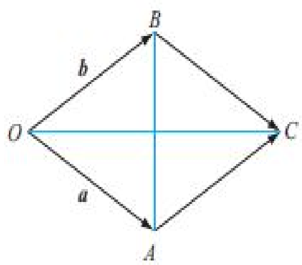
$=4-2\times1+1=3$，

所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.

【例 3】证明菱形的对角线互相垂直.

【分析】如图所示，已知菱形 *OACB*，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，要证明菱形 *OACB* 的对角线$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{BA}$，只要证明$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$即可．而$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

【证明】如图所示，已知菱形 *OACB*，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.



因为$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，

所以$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$，

</td>
<td>

让学生熟练应用向量内积运算的分配律.

让学生学会通过计算两个非零向量的内积，证明两个向量互相垂直.

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>所以，$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{BA}$.
即菱形的对角线互相垂直.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>【例 4】已知$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{2}$，求$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.
【解】
因为 $\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\times 2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
由于$0\leqslant\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$，所以 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$.</td><td>让学生学会通过计算两个非零向量的内积及它们的模，得出两个非零向量的夹角.</td></tr>
<tr><td>小结</td><td>引导学生小结.
（1）两个非零向量夹角的定义.
（2）两个非零向量的内积.
（3）内积运算定律.
（4）两个向量内积的性质.
（5）平面向量的内积常见的题型主要有哪些？</td><td>回顾学习的过程，总结本节课的收获.</td></tr>
<tr><td>作业</td><td>教材第 86 页，习题第 1，2，3，4 题.</td><td></td></tr>
</table>