

3.2.3 数乘向量

【学情分析】

学生在学习本节内容之前，已熟知向量的概念，掌握了向量的加、减法的三角形法则，具备了一定的认图和作图能力. 本节内容是向量的加、减法的特殊情况，即当两个向量方向相同或相反时，不能用三角形法则求和向量及差向量，故而引入本节内容.

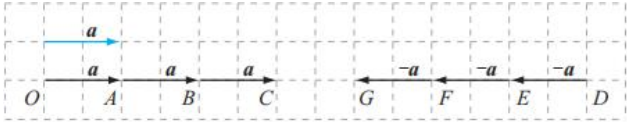
【教学目标】

- (1) 通过实例掌握数乘向量的运算及运算律，并理解其几何意义.
- (2) 理解并掌握共线向量基本定理.
- (3) 通过教学，帮助学生养成规范作图的习惯，培养学生运用数形结合的思想方法解决问题的能力.

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是数乘向量的定义及其运算，教学难点是共线向量基本定理.

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
导入	【问题情境】 已知非零向量 a，求作： (1) $a+a+a$; (2) $(-a)+(-a)+(-a)$. 解： 作图如下.  (1) (2) 通过作图，我们可以看到， $a+a+a=\overrightarrow{OC},$ $(-a)+(-a)+(-a)=\overrightarrow{DG}.$ 对于向量 a，我们把 $a+a+a$ 记作 $3a$，把 $(-a)+(-a)+(-a)$ 记作 $-3a$.	在向量加法的基础上引入数乘向量的定义，符合学生认知规律，有利于学生对概念的同化，能培养学生运用数形结合的思想方法解决问题的能力.

	观察图片，$3\mathbf{a}$ 与 $-3\mathbf{a}$ 是否还是一个向量？它的长度与方向有何变化？ 观察发现：$3\mathbf{a}$ 的长度等于 $3 \mathbf{a}$，方向与 $\mathbf{a}$ 的方向相同；$-3\mathbf{a}$ 的长度同样等于 $3 \mathbf{a}$，方向与 $\mathbf{a}$ 的方向相反. 作图并思考：已知 $\overrightarrow{AB}$，把线段 AB 三等分，分点为 P, Q，则 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{BP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的关系如何？	
新课	1. 数乘向量的定义 一般地，给定一个实数 λ 和任意一个向量 $\mathbf{a}$，规定它们的乘积是一个向量，记作 $\lambda\mathbf{a}$. 向量 $\lambda\mathbf{a}$ 的长度与方向规定为： (1) $\lambda\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$; (2) 当 $\lambda > 0$ 时，$\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 的方向相同；当 $\lambda < 0$ 时，$\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 的方向相反. 上述实数 λ 与向量 $\mathbf{a}$ 相乘的运算简称数乘向量. 显然，$0\mathbf{a} = \mathbf{0}$，$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$. 2. 数乘向量的几何意义 数乘向量的几何意义就是把向量沿着它的方向或反方向放大或缩小. 如 $2\mathbf{a}$ 的几何意义就是沿着向量 $\mathbf{a}$ 的方向，长度放大为原来的 2 倍. 练习 1 任作向量 $\mathbf{a}$，作出向量 $-3\mathbf{a}$，$\frac{1}{2}\mathbf{a}$，$-\frac{1}{3}\mathbf{a}$，并说出它们的几何意义. 3. 数乘向量线性运算及其运算律 设 $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$，可以验证，数乘向量运算满足下列运算律： (1) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$; (2) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$; (3) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.	紧扣向量的两要素分析定义，便于学生理解数乘向量的几何意义. 采用类比学习的方式. 有实数运算法则的基础，学生解决这部分题目比较容易. 教师要提醒学生手写向量 $\mathbf{a}$

向量的加法、减法、数乘向量以及它们的混合运算，统称向量的线性运算.

请观察, 数乘向量的运算律与实数乘法运算律有什么相似之处.

例 1 计算:

(1) $(-2) \times 3a$; (2) $2(a+b) - 3(a-b)$;

$$(3) \quad (\lambda + \mu)(a - b) - (\lambda - \mu)(a + b) \quad .$$

解法略。

练习 2

化简： (1) $2(a-b)+3(a+b)$; (2) $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$.

例2 设 $\mathbf{x}$ 是未知向量, 解方程 $5(\mathbf{x}+\mathbf{a})+3(\mathbf{x}-\mathbf{b})=\mathbf{0}$.

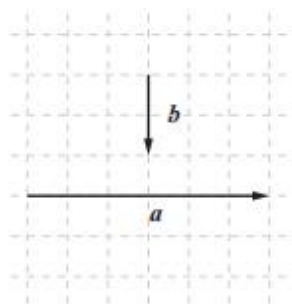
解法略。

练习3

解关于 $\mathbf{x}$ 的方程:

$$(1) 3(a+x)=x; \quad (2) x+2(a+x)=0.$$

例3 如图所示, 已知向量 a, b , 作出向量 $\frac{1}{2}a - 3b$.



解法略。

4. 共线向量基本定理

可以看出, 向量 λa 与向量 a 共线. 反之, 若有一个向量 b 与向量 $a(a \neq 0)$ 共线, 则向量 b 与 a 的关系如下:

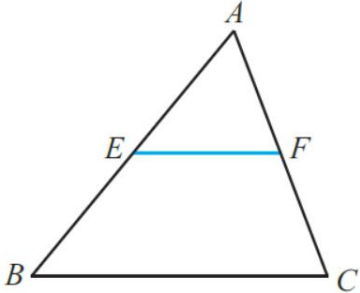
当 $b = 0$ 时, $b = 0a$;

当 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相同时, 记 $\lambda = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$, 则有 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$;

当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反时, 记 $\lambda = -\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 则有 $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$.

时, 应写作 $\vec{a}$.

由例 3 引出
向量共线的定
理，由特殊到
一般，便于学
生接受.

	共线向量基本定理： 向量 $a(a \neq 0)$ 与 b 共线 $\Leftrightarrow$ 存在唯一一个实数 λ，使 $b = \lambda a$. 例 4 已知 e, e_1, e_2 为非零向量，判断下列各题中向量 a, b 是否平行： (1) $a = 2e, b = 4e$; (2) $a = 2e_1 + 4e_2, b = e_1 + 2e_2$. 解法略。 例 5 如图所示，已知点 E, F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 的中点，求证： $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{EF}$.  解法略。 练习 4 在 $\triangle ABC$ 中，已知点 D 是线段 BC 的中点，求证： $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$	本题可帮助学生学会用共线向量基本定理判断两个向量是否平行。 本题用向量知识解决平面几何问题，对学生来说有些难度。教师要结合向量的运算法则详细讲解。
小结	引导学生小结。 1. 数乘向量的定义及其几何意义。 2. 数乘向量的运算律。 3. 共线向量基本定理。	针对学生薄弱环节或易错处进行强调和小结。
作业	教材第 82 页，习题第 3 题。	巩固所学内容。