

## 1.4.1 余弦定理（第 1 课时）

### 【学情分析】

学生已经学习了平面几何、解直角三角形、三角函数、向量等知识，这些知识都为学习解三角形提供了保障. 从能力来看，学生具备一定的观察、分析、解决问题的能力，但对前后知识的联系、理解、应用较为欠缺，是他们的薄弱环节. 教学时，需注意循序渐进，慢慢来、多示范、多练习，逐步提升学生的应用能力.

### 【教学目标】

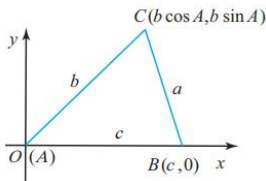
- (1) 通过创设情景，引导学生发现并推导余弦定理，应用余弦定理理解三角形.
- ①已知三角形的两边及其夹角，求第三边. ②已知三角形的三边求内角.
- (2) 增强学生的创新意识，提高学生的协作能力、逻辑思维能力和交流能力.
- (3) 带领学生感受数学源于生活，服务于生活.

### 【教学重点和难点】

本节课的教学重点是用余弦定理理解三角形，教学难点是余弦定理的推导证明.

### 【教学过程】

| 教学环节 | 教学内容                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 设计意图                                |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| 导入   | <p>【创设情境，提出问题】</p> <p>1. 利用如左下图所示的现代测量工具，可以方便地测出 3 点之间的一些距离和角，从而可得到未知的距离与角.</p> <p>2. 如右下图所示，<math>A</math>，<math>B</math> 分别是两个山峰的顶点，在山脚下任意选择一点 <math>C</math>，然后使用测量仪得出 <math>AC</math>，<math>BC</math> 以及 <math>\angle ACB</math> 的大小. 你能根据这 3 个量求出 <math>AB</math> 吗？</p> <div></div> <p>3. 对于一般的三角形，给定一些元素，那么其他元素与给定元素存在着怎样的数量关系呢？</p> <p>4. 由三角形的已知元素求未知元素的过程称为解三角形.</p> | 通过实例创设情境，激发学生对本节课的兴趣，同时提出数学问题，导入新课. |

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                    |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>新课</p> | <p><b>【建构模型，推导公式】</b></p> <p>下面我们来看，已知三角形的两边及其夹角，如何求第三边. 如图所示，设<math>\triangle ABC</math>的顶点<math>A</math>与坐标原点<math>O</math>重合，边<math>AB</math>在<math>x</math>轴上，则点<math>B</math>的坐标为<math>(c, 0)</math>，点<math>C</math>的坐标为<math>(b\cos A, b\sin A)</math>.</p> <p>根据两点间的距离公式，有</p> $a^2 = (b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2,$ <p>化简，得</p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$  <p><b>【小组合作，尝试推导】</b></p> <p>小组合作用类似方法证明：</p> $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B;$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$ <p><b>【总结归纳】</b></p> <p>于是我们可以得到如下公式：</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <math display="block">\begin{aligned} a^2 &amp;= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 &amp;= a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ c^2 &amp;= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{aligned}</math> </div> <p>我们把以上公式称为余弦定理，即三角形任何一边的平方，等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角余弦的积的两倍.</p> <p>余弦定理还可以表述为：</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <math display="block">\begin{aligned} \cos A &amp;= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\ \cos B &amp;= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \\ \cos C &amp;= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \end{aligned}</math> </div> <p>余弦定理在解三角形中的应用主要有两种情形：</p> | <p>利用锐角三角函数和两点间的距离公式，推导出余弦定理，降低学习难度.</p> <p>通过小组交流合作，推导出其余两个公式，提高学生交流合作的能力.</p> <p>总结归纳余弦定理的公式及变形，培养学生从特殊到一般的思维能力.</p> <p>利用余弦</p> |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                 |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
|    | <p>(1) 已知三角形的两边及其夹角, 求第三边;</p> <p>(2) 已知三角形的三边求内角.</p> <p><b>【练习巩固】</b></p> <p><b>【例 1】</b></p> <p>在<math>\triangle ABC</math>中, 已知<math>a=3</math>, <math>c=1</math>, <math>\angle B=60^\circ</math>, 求<math>b</math>的值.</p> <p><b>解:</b> 由余弦定理, 得</p> $\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ &= 3^2 + 1^2 - 2 \times 3 \times 1 \times \cos 60^\circ \\ &= 7, \end{aligned}$ <p>所以<math>b = \sqrt{7}</math>.</p> <p><b>练习 1</b> 求下列三角形中未知的边:</p> <p>(1) <math>a=35</math>, <math>b=24</math>, <math>\angle C=60^\circ</math>;</p> <p>(2) <math>a=3\sqrt{3}</math>, <math>c=2</math>, <math>\angle B=150^\circ</math>.</p> <p><b>【例 2】</b></p> <p>在<math>\triangle ABC</math>中, 已知<math>a=1</math>, <math>b=1</math>, <math>c=\sqrt{3}</math>, 求<math>\angle C</math>的值.</p> <p><b>解:</b> 由余弦定理, 得</p> $\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{1^2 + 1^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \times 1 \times 1} \\ &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$ <p>因为<math>0^\circ &lt; \angle C &lt; 180^\circ</math>, 所以<math>\angle C=120^\circ</math>.</p> | <p>定理解三角形的第一种情况: 已知三角形的两边及其夹角, 求第三边.</p> <p>利用余弦定理理解三角形的第二种情况: 已知三角形的三边求内角.</p> |
| 小结 | <p>引导学生小结.</p> <p>1. 余弦定理:</p> <div style="border: 1px solid #add8e6; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <math display="block">\begin{aligned} a^2 &amp;= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 &amp;= a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ c^2 &amp;= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{aligned}</math> </div> <p>2. 余弦定理在解三角形中的应用主要有两种情形:</p> <p>(1) 已知三角形的两边及其夹角, 求第三边;</p> <p>(2) 已知三角形的三边求内角.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <p>回顾学习的过程, 总结本节课的收获.</p>                                                       |