

1.5 三角计算的应用

【学情分析】

学生在前面的章节学习了和角公式、倍角公式、正弦型函数、余弦定理、三角形的面积和正弦定理，并做了相关的练习，可以熟练地应用这些公式和定理解决具体问题. 本节课主要通过应用举例与数学知识的应用，进一步强化学生分析问题和解决问题的能力.

【教学目标】

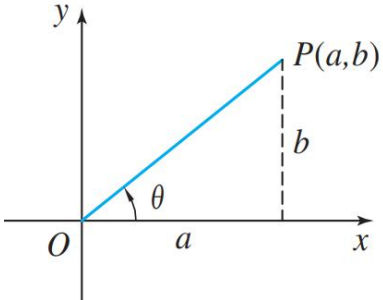
- (1) 会利用三角计算，解决一些生活中的实际应用问题.
- (2) 通过应用举例与数学知识的应用，强化学生分析问题和解决问题的能力.

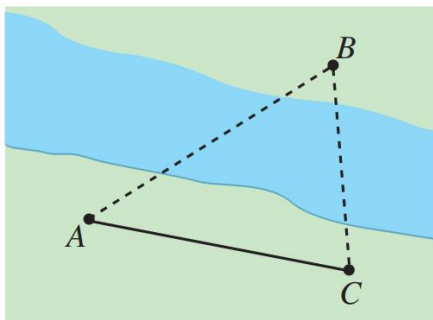
【教学重点和难点】

本节课的教学重点和难点是应用三角计算公式、正弦定理、余弦定理等解决生活中的实际问题.

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
导入	三角公式在数学的公式推导、日常生活中的测量以及物理的电学等都有应用，下面我们来看几个例子.	提出问题，启发思考，引出课题.
新课	【例 1】 求函数 $y=a\sin x+b\cos x$ 的最大值、最小值和周期，其中 a, b 是不同时为零的实数. 解： 考察以 (a, b) 为坐标的点 $P(a, b)$ (如图)，设以 OP 为终边的一个角为 θ，则 $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$ 于是，已知函数可化为 $y = \sqrt{a^2+b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x \right)$ $= \sqrt{a^2+b^2} (\cos \theta \sin x + \sin \theta \cos x)$	求函数的最大值、最小值和周期，介绍辅助角公式的主要作用是将多个三角函数的和化成单个角的三角函数.

	$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta).$ 所以, 函数 $y = a \sin x + b \cos x$ 的最大值时 $\sqrt{a^2 + b^2}$, 最小值是 $-\sqrt{a^2 + b^2}$, 周期为 2π. 	
	【例 2】 已知三个电流瞬时值的函数解析式分别是 $I_1 = 5 \sin \omega t$, $I_2 = 6 \sin(\omega t - 60^\circ)$, $I_3 = 10 \sin(\omega t + 60^\circ)$. 求它们合成后的电流瞬时值 $I = I_1 + I_2 + I_3$ 的函数解析式(角度精确到 1 分). 解: $I = I_1 + I_2 + I_3 = 5 \sin \omega t + 6 \sin(\omega t - 60^\circ) + 10 \sin(\omega t + 60^\circ)$ $= 5 \sin \omega t + 6 (\sin \omega t \cos 60^\circ - \cos \omega t \sin 60^\circ)$ $+ 10 (\sin \omega t \cos 60^\circ + \cos \omega t \sin 60^\circ)$ $= 5 \sin \omega t + 8 \sin \omega t + 2\sqrt{3} \cos \omega t$ $= 13 \sin \omega t + 2\sqrt{3} \cos \omega t$ $= \sqrt{13^2 + (2\sqrt{3})^2} \sin(\omega t + \theta)$ $= \sqrt{181} \sin(\omega t + \theta),$ 其中 θ 满足 $\cos \theta = \frac{13}{\sqrt{181}}$, $\sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{181}}$, 用函数型计算器计算可得 $\theta \approx 14^\circ 55'$. 所以 $I = \sqrt{181} \sin(\omega t + 14^\circ 55')$. 例 2 说明 几个振幅和初相不同, 但频率相同的正弦波之和, 总是等于另一个具有相同频率的正弦波.	引导学生应用两角和、两角差的正弦公式, 强调知识间的联系, 把三角计算的思路和方法运用到生活中去, 解决问题.
	【例 3】 如图所示, 设 A, B 两点在河的两岸, 测量者在与 A 同侧的河岸边选取测点 C, 测得 AC 的距离是 50 m, $\angle BAC = 51^\circ$, $\angle ACB = 75^\circ$, 求 A, B 两点间的距离(精确到 0.1 m).	引出测量距离问题, 指导学生解决这类问题要先将已



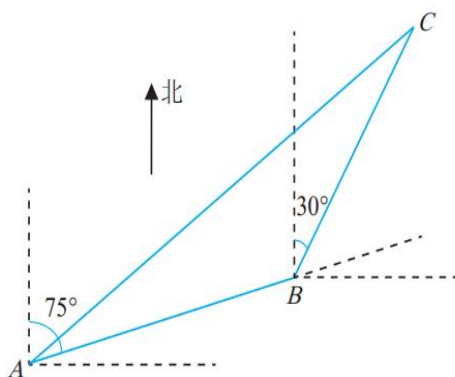
解: $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 54^\circ$,

由正弦定理可得 $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$,

所以 $AB = \frac{AC \sin \angle ACB}{\sin \angle ABC} = \frac{50 \sin 75^\circ}{\sin 54^\circ} \approx 59.7(\text{m})$.

知条件归结到三角形中, 然后根据已知条件计算所求数值.

【例 4】 如图所示, 一艘货轮从 A 地出发, 沿北偏东 75° 的方向航行 105 n mile 后到达海岛 B, 再沿北偏东 30° 的方向航行 88 n mile 后到达海岛 C. 如果该货轮从 A 地出发直接到达海岛 C, 应沿什么方向航行, 需要航行的距离是多少 (结果保留一位小数)?



解: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 180^\circ - (75^\circ - 30^\circ) = 135^\circ$.

由余弦定理, 得

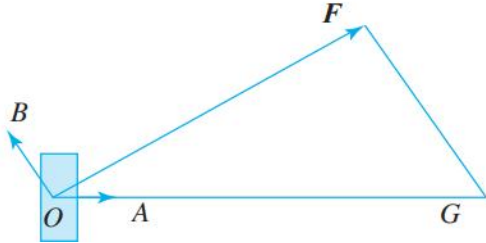
$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \angle ABC} \\ &= \sqrt{105^2 + 88^2 - 2 \times 105 \times 88 \times \cos 135^\circ} \\ &\approx 178.4 \text{ (n mile)}. \end{aligned}$$

由正弦定理, 得 $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{BC}{\sin \angle CAB}$, 即

$$\sin \angle CAB = \frac{BC \times \sin \angle ABC}{AC} \approx \frac{88 \times \sin 135^\circ}{178.4} \approx 0.35,$$

所以 $\angle CAB \approx 20.5^\circ$ 或 $\angle CAB \approx 159.5^\circ$ (舍去),

综合应用余弦定理和正弦定理, 强化学生用定理解决生活中实际问题的能力.

	而 $75^\circ - 20.5^\circ = 54.5^\circ$. 因此, 如果该货轮从 A 地出发直接到达海岛 C, 应沿北偏东 54.5° 的方向大约航行 178.4 n mile.	
巩固 练习	【习题】 1. 已知三个电流瞬时值的函数解析式分别是 $I_1 = 8\sin\omega t, I_2 = 12\sin(\omega t - 45^\circ), I_3 = 10\sin(\omega t + 30^\circ).$ 求合成的正弦波 $I = I_1 + I_2 + I_3$ 的函数解析式. 2. 电流 I 随时间 t 变化的函数关系是 $I = I_m \sin \omega t$, 设 $\omega = 100 \pi \text{ rad/s}$, $I_m = 5 \text{ A}$: (1) 求电流 I 随时间变化的周期与频率; (2) 当 $t = 0, \frac{1}{200}, \frac{1}{100}, \frac{3}{200}, \frac{1}{50} \text{ s}$ 时, 求电流 I. 3. 一根长 $l \text{ cm}$ 的线, 一端固定, 另一端悬挂一个小球, 小球摆动时, 离开平衡位置的位移 s (单位: cm) 和时间 t (单位: s) 的函数关系是 $s = 3\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{3})$. (1) 求小球摆动的周期; (2) 已知 $g = 980 \text{ cm/s}^2$, 要使小球摆动的周期是 1 s, 则线的长度是多少 (精确到 0.1 cm, π 取 3.14) ? 4. 如下图所示, 对某物体施加一个大小为 5 N 的力 F, 这个力被分解到 OA, OB 两个方向上. 已知 $\angle AOB = 120^\circ$, 力 F 与 OA 的夹角为 25°, 求分力的大小 (精确到 0.01 N). 	运用数学知识解决实际问题, 培养学生发散思维的能力, 及时掌握学生的学习情况, 帮助学生查漏补缺.

小结	三角计算的应用 正弦型函数求最大值、最小值和周期 和角公式 正弦定理、余弦定理 (左边蓝色框的轮廓线只有一半)	培养学生 总结学习过 程的能力.
-----------	---	---------------------------------