

2.2.2 等差数列的前 n 项和（第 1 课时）

【学情分析】

学生在前面的课程中，学习了数列的定义、等差数列的概念与通项公式，因此可以对学生的知识体系进行顺应性的建构，从等差数列通项公式向等差数列的前 n 项和研究。从学科核心素养来看，学生具备一定的数学运算、直观想象、逻辑推理、数学抽象等素养。其中，逻辑推理和数学抽象是学生的薄弱环节。教学时，可以起点低一些（从具体数值引申到字母），并结合熟悉的几何图形引导学生推导等差数列的前 n 项和公式。

【教学目标】

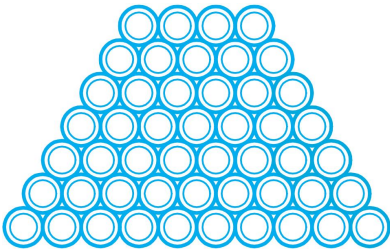
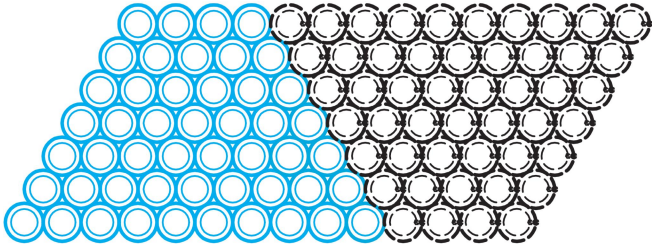
- （1）通过联系生活实例、结合图形，帮助学生在推导等差数列前 n 项和公式的过程中，提升数学运算素养和直观想象素养，让学生领会数形结合的思想方法。
- （2）让学生领会等差数列前 n 项求和的思想方法，提升逻辑推理素养和数学抽象素养。
- （3）在探索公式的过程中，培养学生观察、猜想、归纳、分析、综合推理的能力，让学生领会由特殊到一般的思想方法。
- （4）结合例题和练习，让学生学会用等差数列的前 n 项和公式求和，培养学生独立思考、合作交流的品质。

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是等差数列前 n 项和公式的推导和简单应用，教学难点是等差数列前 n 项和公式的推导。

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	学生练习： （1）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，首项 $a_1=3$，公差 $d=4$，求 a_2，a_3 和 a_n。 解：依题意得，$a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7$。 $a_3 = a_1 + 2d = 3 + 2 \times 4 = 11.$ $a_n = a_1 + (n - 1)d = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1.$	利用等差数列的通项公式，求其中的变量，为推导等差数列的前 n 项和公式做准备。

	(2) 在等差数列$\{a_n\}$中, 第 10 项 $a_{10}=40$, 公差 $d=3$, 求 a_9, a_8 和 a_1. 解: 依题意得, $a_9 = a_{10} - d = 40 - 3 = 37$. $a_8 = a_{10} - 2d = 40 - 2 \times 3 = 34.$ $a_1 = a_{10} - 9d = 40 - 9 \times 3 = 13.$	
新课	1. 引入问题: 如下图, 工厂仓库里堆放着一批钢管, 共堆放 7 层, 求钢管的总数.  分析: 怎样求得钢管的总数呢? 显然, 把各层钢管数直接相加就可得出结果. 如果钢管的层数很多, 例如铺了 50 层, 有无简便方法来计算呢? 2. 倒序相加法计算钢管总数, 解决导入问题.  图形分析: 显然从最上一层钢管数开始, 各层钢管数 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 组成公差为 1, 项数为 7 的等差数列. 观察上图补齐的平行四边形, 可知每层数目为梯形最高层的钢管数与最低层的钢管数之和, 由此可利用乘法简便运算. 补齐的平行四边形可以用倒序相加法实现计算钢管总数. 解: 用 S_7 来表示钢管的总数, 则 $S_7 = 4+5+6+7+8+9+10; \quad \text{①}$ 将上式右边各项次序反过来, 又可写成 $S_7 = 10+9+8+7+6+5+4. \quad \text{②}$ 把①②两式上下对应项相加, 其和都等于 14, 所以把①②的两	回顾“等差数列的概念”第 1 课时中提出的问题, 用实际问题激发学生探究的兴趣和欲望. 引导学生使用熟悉的几何方法, 把梯形倒置, 将原图补成平行四边形. 借助直观图形, 启发思路, 帮助学生理解. 渗透数形结合的思想方法, 培养学生直观想象素养和数学运算素养.

	边分别相加，得 $2S_7 = (4+10) \times 7,$ $S_7 = \frac{(4+10) \times 7}{2},$ $S_7 = 49.$	
	3. 推导等差数列前 n 项和公式. 一般地，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记作 S_n，即 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$ 可以得到等差数列前 n 项和公式 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$ 4. 等差数列前 n 项和公式的推导(拓展延伸). 由上例算法启示，对于公差为 d 的等差数列，我们用两种方法表示 S_n： $S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d] \quad (1)$ $S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + [a_n - (n-1)d] \quad (2)$ 把 (1) (2) 两边分别相加，得到 $2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ 个 } (a_1 + a_n)}$ $= n(a_1 + a_n)$ 由此得到 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$ (3) 代入等差数列通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$，上面公式又可写成 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d. \quad (4)$	引导学生观察、剖析算式特征，发现公式中各项的联系，将具体数字表达式提炼为字母表达式，体会由特殊到一般的思想方法. 培养学生的数学运算素养和数学抽象素养. 引导学生联系等差数列的通项公式推导求和公式，加深学生对等差数列性质的理解. 引导学生理解倒序相加法的原理，提高学生的数学运算素养、逻辑推理素养和数学抽象素养.

	5. 分析公式的特征，理清公式中各项的联系，学会选用合适的公式. 在这两个公式中，每个公式都包含四个变量，只要知道其中任意三个，就可求出第四个. 6. 学生练习：教材第 52 页，练习第 1 题（1）（2）. （1）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=5$，$a_n=95$，$n=10$，求 S_n. 解：依题意得，$S_{10} = \frac{10 \times (5 + 95)}{2} = 500$. （2）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 100$，$d = -2$，$n = 50$，求 S_{50}. 解：依题意得，$S_{50} = 50 \times 100 + \frac{50 \times 49}{2} \times (-2) = 2\,550$.	进一步引导学生理清公式中各项的联系，让学生领会选用公式的原则. 通过练习，帮助学生学会选择、应用公式，加深对公式的理解. 在教师的指引下，帮助学生提高分析问题的能力和数学运算素养.
小结	引导学生小结. 等差数列的前 n 项和公式为： $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} ;$ $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d.$	教师鼓励学生积极回答，提高学生的口头表达能力和归纳概括能力.
作业	教材第 52 页，练习第 1 题（3）（4）.	巩固拓展.