

2.2.2 等差数列的前 n 项和（第 2 课时）

【学情分析】

学生在前面的课程学习了数列的定义、等差数列的概念与通项公式，在上一节课学会了等差数列前 n 项和公式的推导，初步掌握了使用等差数列前 n 项和公式求和的方法。本节课顺势引导学生把等差数列通项公式与前 n 项和公式联系起来，进一步认识等差数列性质，建立关于等差数列的数学模型去解决实际问题，让学生体会等差数列公式的实用性。从学科核心素养来看，学生具备一定的数学运算、数学抽象以及数据分析的素养，但数学抽象是学生的薄弱环节，教学时可以起点低些，选择较简单的实际问题入手。

【教学目标】

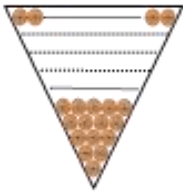
- （1）利用等差数列通项公式与前 n 项和公式，在五个变量之间互求，提升数学运算素养。
- （2）会建立关于等差数列的数学模型，解决与等差数列有关的实际问题，提升数学抽象、数据分析和数学建模素养。

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是理清等差数列中五个变量 S_n , a_1 , n , d , a_n 的联系，会在这 5 个变量之间互求；学会等差数列前 n 项和公式的简单应用。教学难点是建立关于等差数列前 n 项和的数学模型，解决实际问题。

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	学生练习： （1）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 = 1$, $a_6 = 16$，求数列的前 6 项和； 解： $S_6 = \frac{6(a_1 + a_6)}{2} = \frac{6 \times (1 + 16)}{2} = 51$. （2）求等差数列 2, 5, 8, 11, ... 前 100 项的和. 解：依题意得 $d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$, 前 100 项和 $S_{100} = 100a_1 + \frac{100 \times (100 - 1)}{2} d$ $= 100 \times 2 + \frac{100 \times (100 - 1)}{2} \times 3 = 15\,050$.	复习等差数列的求和公式，唤醒学生的记忆，为深入应用等差数列前 n 项和公式做准备.

导入	观察等差数列的通项公式、前 n 项和公式： $a_n = a_1 + (n-1)d;$ $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}; S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ 思考：公式涉及等差数列的哪些变量？联立它们为方程组后，需要知道哪些量就能求出其余量？ 结论：公式涉及 S_n, a_1, n, d, a_n 五个变量，可以知三求二．	引导学生观察公式，利用方程思想理清 5 个变量的关系，从而获得如何进行 5 个量互求的思路．
新课	例题讲解 例 1 如下图所示，一个堆放铅笔的 V 型架的最下面一层放 1 支铅笔，往上每一层都比下一层多放一支，最上面有 120 支，这个 V 形架上共有多少支铅笔？  教师提出问题，引导学生分析解题思路： (1) V 形架上每层铅笔数有什么关系？成什么数列？ (2) 问题是否可以转化为等差数列问题？如果可以，涉及等差数列哪些量？已知哪些量？求哪些量？ (3) 如何将问题的解决用数学表达？ 解：由题意可知，这个 V 形架上共放 120 层铅笔，且自下向上各层的铅笔数组成等差数列，记为 $\{a_n\}$，其中 $a_1=1, n=120, d=1, a_{120}=120$，根据等差数列前 n 项和公式，得 $S_{120} = \frac{120 \times (1 + 120)}{2} = 7260.$ 即 V 型架上共有 7 260 支铅笔． 例 2 在小于 100 的正整数的集合中，有多少个数是 7 的倍数？求它们的和． 教师提出问题，引导学生分析解题思路： (1) 在小于 100 的正整数的集合中，7 的倍数有哪些？	引导学生分析题意，思考如何建立数学模型解决实际问题．培养学生的数学抽象、数据分析和数学建模素养． 引导学生分析数据之间的关系，培养学生的数学

	(2) 这些数组成了一个什么样的数列? (3) 如何用数列符号表示这些已知量? 解: 在小于 100 的正整数集合中, 以下各数是 7 的倍数 $7, 7 \times 2, 7 \times 3, \dots, 7 \times 14.$ 即 7, 14, 21, $\dots$, 98. 显然, 这是一个等差数列, 其中 $a_1 = 7, d = 7$, 项数为小于 $\frac{100}{7}$ 的最大整数, 即 $n = 14, a_{14} = 98$. 根据等差数列前 n 项和公式, 得 $S_{14} = \frac{14 \times (7 + 98)}{2} = 735.$ 例 3 在等差数列 $-5, -1, 3, 7, \dots$ 中, 前多少项和是 345? 教师点拨: 题中已知哪些量? 所求什么量? 如何用数列符号表示? 选择哪个公式? 项数的取值范围是什么? 解: 这里 $a_1 = -5, d = 4, S_n = 345$. 根据等差数列的前 n 项和公式, 得 $345 = -5n + \frac{n(n-1)}{2} \times 4,$ 整理, 得 $2n^2 - 7n - 345 = 0$, 解得 $n_1 = 15, n_2 = -\frac{23}{2}$ (不合题意, 舍去). 所以 $n = 15$. 即这个数列的前 15 项的和是 345. 学生练习: 某阶梯教室有 20 排座位, 第一排有 26 个座位, 从第 2 排起, 每一排都比前一排多 2 个座位, 求第 15 排与最后一排各有多少个座位. 该阶梯教室总共有多少个座位? 解: 依题意, 得每排座位数成等差数列, 其中 $a_1 = 26, d = 2$. 第 15 排座位数 $a_{15} = a_1 + (15 - 1)d = 26 + 14 \times 2 = 54$; 阶梯教室总共有 20 排座位, 即 $n = 20$, 所以, 阶梯教室的总座位数为 $S_{20} = 20 \times 26 + \frac{20 \times (20 - 1)}{2} \times 2 = 900.$	运算、数据分析素养. 解此题的关键是分析题目所给条件, 正确选择公式. 要特别留意项数的取值范围. 学生练习, 提高自主解决问题能力.
--	--	--

小结	引导学生小结. 1. 等差数列的通项公式与前 n 项和公式: $a_n = a_1 + (n-1)d; S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}; S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$ 只需要知道其中任意三个量, 就可以求出其余各量. 2. 有些生活中的现实问题需要用数学知识解决, 解决的关键在于建立数学模型, 然后将实际问题转化为数列问题求解.	教师鼓励学生积极回答, 提高学生的口头表达能力和归纳概括能力.
作业	教材第 52 页, 练习第 2, 3 题.	巩固拓展.