

2.3.2 等比数列的前 n 项和（第 1 课时）

【学情分析】

学生在前面学习了数列的定义、等差数列的通项公式与前 n 项和公式、等比数列的通项公式等内容，下面进一步学习等比数列的前 n 项和公式. 本节课的教学，既完善了数列的知识体系，也为数列的实际应用打下了坚实的基础，有着承上启下的作用. 从能力来看，学生具备了一定的分析问题与解决问题的能力，逻辑思维能力和类比推理能力也初步形成，较容易从公式的形成、特点等方面把等比数列前 n 项和与等差数列前 n 项和进行类比. 等差、等比数列的前 n 项和公式的推导有着本质的不同，教师教学时需注意低起点、慢慢来、多示范、多练习，帮助学生更好地理解和应用.

【教学目标】

- (1) 理解并熟记等比数列的前 n 项和公式，能熟练应用公式解决相关数学问题.
- (2) 通过对等比数列前 n 项和公式的推导过程的理解，体会错位相减法以及分类讨论的思想方法，提升数学运算素养、逻辑推理素养.
- (3) 通过对等比数列前 n 项和公式的推导发展数学的理性思维，帮助学生养成一丝不苟、严谨求实的科学精神.

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是掌握等比数列的前 n 项和公式，能用等比数列的前 n 项和公式解决相关问题. 教学难点是对错位相减法以及分类讨论的思想方法的应用和理解.

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
导入	怎样求等比数列 $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}, \dots$ 的前 n 项和 S_n ?	直接提出求等比数列前 n 项和的问题，引发学生回忆等差数列前 n 项和的求解过程，并思考如何求解等比数列的前 n 项和.

新课	因为 $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}, \quad ①$ 而且我们知道，把等比数列的任意一项乘公比，就可得到它后面相邻的一项，现将①式的两边分别乘公比q，得到 $qS_n = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n. \quad ②$ 比较①②两式，我们看到①式的右边从第2项到最后一项，与②式右边的第1项到倒数第2项完全相同. 于是将①式的两边分别减去②式的两边，可以消去相同的项，得 $(1 - q)S_n = a_1 - a_1q^n.$ 当$q \neq 1$时，$1 - q \neq 0$，上式两边同时除以$1 - q$，得 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$ 很显然，当$q = 1$时，$S_n = na_1$. 等比数列前n项和的公式包含四个变量，只要知道其中任意三个，就可以求出第四个.	通过对等比数列前n项和公式的推导过程的理解，体会错位相减法以及分类讨论的数学思想方法. 尤其对于$q = 1$这一特殊情况，学生往往容易忽视，在后面使用的过程中出错，教师要加以提醒. 通过公式的推导，加强学生对公式的理解与记忆，提升逻辑推理素养.
	【例 1】求等比数列$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$的前8项的和. 解：因为$a_1 = \frac{1}{2}$，$q = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$，$n = 8$， $\text{所以 } S_8 = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^8 \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{255}{256}.$	引导学生理解并记忆等比数列前n项和公式，示范应用公式求等比数列的前n项和.
	【练习 1】根据下列各组条件，求相应的等比数列$\{a_n\}$的前n项和S_n： (1) $a_1 = 3$，$q = 2$，$n = 6$； (2) $a_1 = 8$，$q = \frac{1}{2}$，$n = 5$. 解：(1) 由等比数列前n项和公式$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，得 $S_6 = \frac{3 \times (1-2^6)}{1-2} = 189.$	记忆等比数列前n项和公式，熟练应用公式求等比数列的前n项和.

	(2) 由等比数列前 n 项和公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, 得 $S_5 = \frac{8 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{2}.$ 【练习 2】求等比数列 1, 2, 4, ... 从第 5 项到第 10 项的和. 解: $a_1 = 1, q = \frac{2}{1} = 2.$ 由等比数列的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$, 得 $a_5 = 1 \times 2^4 = 16.$ 所以求该等比数列的第 5 项到第 10 项的和, 实际上是求以 $a_5 = 16$ 为首项, 公比 $q = 2$ 的等比数列的前 6 项和. 又由等比数列前 n 项和公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, 得 $S_6 = \frac{16 \times (1-2^6)}{1-2} = 1\,008.$	
小结	引导学生小结. (1) 本节课在推导等比数列前 n 项和的公式时, 使用了哪些数学思想与方法? (2) 等比数列前 n 项和公式: 当 $q = 1$ 时, $S_n = na_1$; 当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$	回顾学习的过程, 总结本节课的收获.