

2.3.2 等比数列的前 n 项和（第 2 课时）

【学情分析】

学生在上一节课已经学习了等比数列的前 n 项和公式并进行了简单应用，掌握了在已知首项 a_1 、公比 q 和项数 n 的条件下求解等比数列的前 n 项和的方法，但对公式的应用还不够熟练、灵活. 本节课在上一节课的基础上，加大了练习难度，进行公式的变式练习，在一定程度上有助于提升学生的数学运算素养.

【教学目标】

- (1) 通过强化练习，帮助学生熟记等比数列通项公式和前 n 项和公式，并能灵活应用公式解决等比数列的相关问题.
- (2) 通过变式练习，提高学生分析问题和解决问题的能力，提升学生的数学运算素养和逻辑推理素养.
- (3) 通过等比数列前 n 项和第二个公式 $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$ 的推导，培养学生科学严谨的数学思维.

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是等比数列的前 n 项和公式及其变式应用. 教学难点是结合等比数列的通项公式对等比数列前 n 项和公式 $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ 进行变式，得到等比数列的第二个前 n 项和公式 $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$ 并加以应用.

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	等比数列前 n 项和公式： 当 $q = 1$ 时， $S_n = na_1$ ； 当 $q \neq 1$ 时， $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$.	通过对等比数列前 n 项和公式的回顾，加深学生对公式的理解与记忆，为公式的灵活应用打下基础.

新课	【例 2】 等比数列$\{a_n\}$的公比$q = -\frac{1}{3}$, 前 4 项的和为$\frac{5}{9}$, 求它的首项. 解: 根据等比数列前 n 项和公式及已知条件可得 $\frac{5}{9} = \frac{a_1 \left[1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^4 \right]}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)},$ 解得$a_1 = \frac{3}{4}$, 即首项为$\frac{3}{4}$. 解析: 等比数列前 n 项和的公式, 包含S_n, a_1, q和 n 四个变量, 只要知道其中任意三个, 就可以求出第四个.	引导学生理解并记忆等比数列前 n 项和公式. 通过典型例题总结出: 等比数列前 n 项和公式包含四个变量, 只要知道其中任意三个, 就可以求出第四个.
	【练习 3】 已知等比数列$\{a_n\}$, $a_1 = 36$, $a_5 = \frac{9}{4}$, 求q和S_5. 解: 由等比数列的通项公式$a_n = a_1 q^{n-1}$, 得 $a_5 = a_1 q^4,$ 即$\frac{9}{4} = 36 q^4$, 解得$q = \pm \frac{1}{2}$. 当$q = \frac{1}{2}$时, $S_5 = \frac{36 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{279}{4}$; 当$q = -\frac{1}{2}$时, $S_5 = \frac{36 \times \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^5 \right]}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} = \frac{93}{4}$. 【练习 4】 已知等比数列$\{a_n\}$, $a_n = 1\,296$, $q = 6$, $S_n = 1\,554$, 求 n 和a_1. 解: 由等比数列的前 n 项和公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, 得 $S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}.$ 即 $1\,554 = \frac{a_1 - 1\,296 \times 6}{1-6}$, 解得 $a_1 = 6$. 由$a_n = a_1 q^{n-1}$, 得 $1\,296 = 6 \times 6^{n-1}$, 解得$n = 4$.	通过练习, 提高学生的等比数列通项公式及前 n 项和公式的综合应用能力. 引导学生结合等比数列的通项公式对等比数列前 n 项和公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 进行变式, 得到等比数列的第二个前 n 项和公式 $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$ 并加以应用.

	【练习 5】 在等比数列$\{a_n\}$中, 如果$a_7 - a_5 = a_6 + a_5 = 48$, 求$a_1, q$和$S_{10}$. 解: 联立方程组, 得 $\begin{cases} a_1q^6 - a_1q^4 = 48, \\ a_1q^5 + a_1q^4 = 48, \end{cases}$ 解得$a_1 = 1, q = 2$. 由等比数列的前 n 项和公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, 得 $S_{10} = \frac{1 \times (1-2^{10})}{1-2} = 1\,023.$	提升学生数学运算素养.
小结	引导学生小结. (1) 等比数列前 n 项和公式: 当$q = 1$ 时, $S_n = na_1$; 当$q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q} = \frac{a_1 - a_nq}{1-q}$. (2) 等比数列前 n 项和公式包含变量S_n, a_1, a_n, q和n, 只要知道其中任意三个, 就可以求出另外两个.	回顾所学知识, 加强对公式的理解与记忆. 通过小结, 灵活应用等比数列前 n 项和公式及变式解决相关问题.