1.1.3　两角和与差的正切公式

【学情分析】

学生在前面的课程中，学习了两角和与差的余弦和正弦公式，这与两角和与差的正切公式的推导有密切联系，学生学习本课内容时能深刻体会它们的这种联系，从而加深对公式的理解和记忆．本节几个例子主要目的是训练学生思维的有序性，逐步培养他们良好的思维习惯．教学时应当有意识地对学生的思维习惯进行引导，例如在面对问题时，要注意先认真分析条件、明确要求，再思考应该使用什么公式、使用公式时要具备什么条件等．

【教学目标】

（1）能够利用两角和与差的余弦和正弦公式推导出两角和与差的正切公式，了解它们的内在联系，并在推导过程中体会化归思想的作用．

（2）能够应用两角和与差的正切公式进行化简、求值、证明．掌握公式的正、逆向应用，选用恰当的公式解决问题．

（3）培养学生利用旧知识推导、论证新知识的能力，提高学生进行数学交流、获得数学知识的能力．

【教学重点和难点】

本节课的教学重点是$\mathrm{T}_{(\alpha\pm\beta)}$公式的应用，教学难点是$\mathrm{T}_{(\alpha\pm\beta)}$公式的推导及应用，选用恰当的方法解决问题．

【教学过程】

教学环节	教学内容	设计意图
复习	通过提问，复习两角和与差的余弦公式和正弦公式． 余弦公式： $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，　$(\mathrm{C}_{\alpha+\beta})$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$．　$(\mathrm{C}_{\alpha-\beta})$ 正弦公式： $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，　$(\mathrm{S}_{\alpha+\beta})$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$．　$(\mathrm{S}_{\alpha-\beta})$	回忆两角和与差的余弦、正弦公式，启发学生思考正切公式．

新课	由两角和与差的余弦公式和正弦公式，我们继续探究两角和与差的正切公式. 我们知道 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$, 把上述后一个分式的分子、分母同时除以 $\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta\neq 0)$，得 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$. 把公式中的$\beta$换成$-\beta$，得 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$. 于是，我们得到如下公式： $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$, $\quad(\mathrm{T}_{\alpha+\beta})$ $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$. $\quad(\mathrm{T}_{\alpha-\beta})$ **例 1** 利用和角公式求值： （1）$\tan75°$；（2）$\frac{\tan17°+\tan43°}{1-\tan17°\tan43°}$. **解** （1）$\tan75°=\tan(45°+30°)$ $=\frac{\tan45°+\tan30°}{1-\tan45°\tan30°}$ $=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$. （2）$\frac{\tan17°+\tan43°}{1-\tan17°\tan43°}=\tan(17°+43°)$ $=\tan60°=\sqrt{3}$. **练习 1** 利用和角公式求值： （1）$\tan15°$；（2）$\tan105°$. **练习 2** 计算： （1）$\frac{1-\tan15°}{1+\tan15°}$；（2）$\frac{1+\tan75°}{1-\tan75°}$； （3）$\frac{\tan12°+\tan33°}{1-\tan12°\tan33°}$；（4）$\frac{\tan\frac{5\pi}{12}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{\pi}{6}}$. **例 2** 已知 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,且$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$,求 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})$的值.	通过余弦、正弦与正切之间的联系，引导学生推导两角和与差的正切公式，培养学生良好的逻辑思维能力. 通过对公式正向、逆向的应用，培养学生的逆向思维能力. 通过练习，考查学生的掌握情况，及时进行查漏补缺. 综合应用公式和三角函数

	解　由 $\cos\alpha=-\frac{3}{5},\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，得 $$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=-\frac{4}{5}.$$ 于是 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$,所以 $$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{4}{3}+1}{1-\frac{4}{3}}=-7.$$ **练习 3**　已知 $\tan\alpha=\frac{2}{5},\tan\beta=\frac{3}{7}$,求 $\tan(\alpha+\beta),\tan(\alpha-\beta)$的值. **练习 4**　已知 $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$,且$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$,求 $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)$的值.	的知识解决问题，培养学生思维的严谨性. 通过练习，考查学生的掌握情况，及时进行查漏补缺.
小结	引导学生小结. （1）两角和与差的正切公式： $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},$$ $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$. （2）总结在应用两角和与差的正切公式时，需要注意什么条件.	回顾学习的过程，总结本节课的收获.