

6.3.2 圆的一般方程

【教学目标】

- 1. 了解圆的一般方程，能判断一个二元二次方程是不是圆的方程.
- 2. 能根据圆的一般方程求出圆心坐标和半径，会用待定系数法求圆的一般方程.
- 3. 提升数学运算、逻辑推理的核心素养.

【教学重点】

圆的一般方程.

【教学难点】

二元二次方程与圆的一般方程的关系.

【教学方法】

本节课主要采用讲练结合的方法. 首先由圆的标准方程展开得到圆的一般方程，然后讨论一个二元二次方程满足什么样的条件才能表示圆，最后通过例题，引导学生感悟待定系数法的应用和求曲线方程的一般方法.

【教学过程】

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
引入	1. 圆心为 $C(a, b)$，半径为 $r(r > 0)$ 的圆的标准方程是什么？ 2. 回答下列问题： （1）以原点为圆心，半径为 3 的圆的方程是_____； （2）圆 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ 的圆心坐标是_____，半径是_____. 3. 直线方程有多种形式，圆的方程是否还有其他形式？	教师指出：上节课我们学习了圆的标准方程，请同学们回顾圆心坐标为 (a, b)，半径为 r 的圆的方程怎么表示. 学生回顾上节内容并回答问题. 教师类比直线方程提出问题，学生思考.	回顾上节所学内容，为学习新知做好准备.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	探究 1 (1) 请将圆心在 (a, b), 半径为 r 的圆的标准方程展开; (2) 展开后得到的方程有几个未知数? 未知数的最高次数是几? 这个方程是几元几次方程? (3) 如果令 $-2a = D$, $-2b = E$, $a^2 + b^2 - r^2 = F$, 这个方程可以表示成什么形式? (4) 任意一个圆的方程都可表示为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的形式吗?	学生解决探究 1 中的问题, 教师点评. 教师提问: 在方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 中, D, E, F 是常数吗?	使学生初步了解圆的一般方程的形式. 强调方程中 D, E, F 是常数.
	探究 2 (1) 请举出几个形式为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的方程; (2) 你所举出的方程一定表示圆吗? 下述方程表示的是圆吗? $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 8 = 0$; $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$; $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$.	学生回答探究 2 中的问题. 教师提问: 将三个方程分别配方, 你能得到怎样的方程? 学生根据教师提示分组解答, 变形后的方程分别为 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = -6$, $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 0$, $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$.	通过问题 (1) 的解答引出问题 (2). 突出配方法的作用.
	探究 3 满足怎样的条件时, 方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ① 表示圆? 将方程①配方, 得	学生猜想, 教师强调配方法的应用, 引导学生解答.	强调配方法在解决二次问题中的应用.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}. \quad \textcircled{2}$ (1) 当 $D^2+E^2-4F>0$ 时, 方程①表示以 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心, $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径的圆; (2) 当 $D^2+E^2-4F=0$ 时, 方程①表示一个点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$; (3) 当 $D^2+E^2-4F<0$ 时, 方程①不表示任何图形. 圆的一般方程 当 $D^2+E^2-4F>0$ 时, 方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 称为圆的一般方程. 练习 1 求出下列圆的圆心及半径: (1) $x^2+y^2-6x=0$; (2) $x^2+y^2-4x-6y+12=0$.	教师提问: 将方程②同圆的标准方程比较, 如果方程②表示圆, 必须满足怎样的条件? 此时圆的圆心坐标是多少? 圆的半径呢? 学生回答, 教师点评. 师生共同总结: 由以上探究可知, 只有当 $D^2+E^2-4F>0$ 时, 方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 才表示一个圆. 教师指出: 圆的标准方程指明了圆的圆心和半径, 圆的一般方程表明了圆的方程形式是二元二次方程. 教师提问: 要确定一个圆的标准方程需要知道哪几个值? 怎样确定圆的一般方程呢? 学生回答. 学生练习, 教师引导学生用配方法求解.	类比圆的标准方程, 探究二元二次方程表示圆的条件. 强调圆的标准方程和一般方程的特点. 强化训练.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	例 1 求过三点 $O(0, 0)$, $M(1, 1)$, $N(4, 2)$ 的圆的方程, 并求出这个圆的半径和圆心坐标. 解 设所求圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$ 其中 D, E, F 为常数. 由题意得 $\begin{cases} F = 0, \\ D + E + F + 2 = 0, \\ 4D + 2E + F + 20 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} D = -8, \\ E = 6, \\ F = 0. \end{cases}$ 于是所求圆的方程为 $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0.$ 将这个方程配方, 得 $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25.$ 因此, 所求圆的圆心坐标是 $(4, -3)$, 半径是 5. 练习 2 求经过三点 $(0, 0)$, $(3, 2)$, $(-4, 0)$ 的圆的方程. 例 2 已知某曲线是与两个定点 $O(0, 0)$, $A(3, 0)$ 距离的比为 $\frac{1}{2}$ 的点的轨迹, 求这个曲线的方程, 并画出曲线.	教师提示: 先设所求方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 然后根据圆经过三个点, 这三个点的坐标应满足方程, 从而得到一个三元一次方程组. 教师引导学生解方程组. 教师指出: 求出 D, E, F 的值, 所求圆的方程也就确定了. 像这种求圆的一般方程的方法称为待定系数法. 教师引导学生用配方法表示出圆的标准方程, 然后写出圆心坐标及半径.	引导学生用待定系数法求圆的一般方程.
		学生练习, 教师指导.	巩固所讲内容.
		教师请学生回顾推导圆的标准方程的过程. 学生复习推导圆的标准方程的主要步骤.	

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	解 在给定的坐标系中, 设 $M(x, y)$ 是曲线上的任意一点, 点 M 在曲线上当且仅当 $\frac{ OM }{ AM } = \frac{1}{2}.$ 由两点间的距离公式, 上式可用坐标表示为 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}} = \frac{1}{2}.$ 两边平方并化简, 得所求曲线方程为 $x^2+y^2+2x-3=0.$ 将方程配方, 得 $(x+1)^2+y^2=4.$ 所以所求曲线是以 $C(-1, 0)$ 为圆心, 半径为 2 的圆. 练习 3 求与两定点 $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$ 的距离比为 $\sqrt{2}$ 的点的轨迹方程.	教师引导学生设 $M(x, y)$ 是曲线上的任意一点, 根据题意写出动点 M 满足的条件. 教师提示: 用点的坐标表示点 M 满足的几何条件. 学生化简方程. 学生练习, 教师指导.	强化训练.
小结	1. 圆的一般方程是 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$ 其中 $D^2+E^2-4F>0$. 2. 用待定系数法求圆的一般方程.	学生在教师的引导下回顾本节主要内容.	概括本节课的重要知识, 便于学生理解、记忆.
作业	必做题: 本节练习 A 组第 1~2 题. 选做题: 本节练习 B 组第 2 题.	学生标记作业.	针对学生实际, 对课后书面作业实施分层设置.