7.3.2 空间几何体的体积

【教学目标】

1. 理解柱、锥的体积公式，了解球的体积公式.

2. 会求简单组合体的体积.

3. 体会体积公式在实际生活中的应用，提升数学运算的核心素养.

【教学重点】

柱体、锥体、球的体积公式的应用.

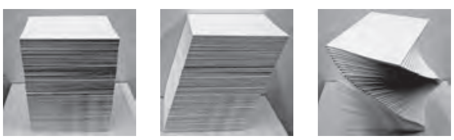
【教学难点】

简单组合体体积的计算.

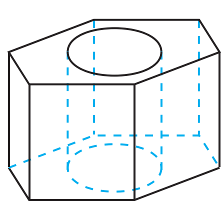
【教学方法】

本节课主要采用启发探究、讲练结合的方法.

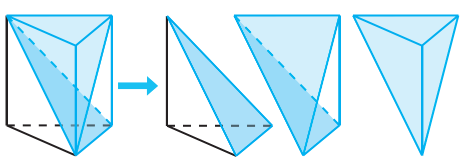
【教学过程】

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	**实验** 取一摞书堆放在桌面上，组成长方体，然后用手推一下改变其形状，如图 1 所示. 观察几何体体积有无变化.  图 1 **结论：**几何体的体积没变.	教师引导学生通过实验探究得出结论，引出本节课题.	通过实验探究，培养学生观察分析和归纳总结的能力.
新课	**一、柱体的体积** 祖暅原理：幂势既同，则积不容异. 即夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等.	教师介绍祖暅原理及祖暅的生平，并通过动画演示祖暅原理.	介绍祖暅的数学成就，激发学生的民族自豪感.

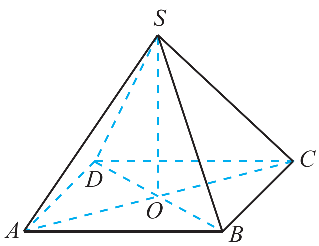
续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	柱体（棱柱、圆柱）的体积公式： $$\boxed{V_{柱体}=Sh.}$$ 其中，S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高.	教师总结柱体的体积公式，学生理解、记忆公式.	借助多媒体，能帮助学生更直观地理解祖暅原理.
	例 1　已知圆柱的高为 4，底面半径为 2，求该圆柱的体积. **解**　该圆柱的底面积为 $$S=\pi\times 2^2=4\pi,$$ 又因为圆柱的高为 4，所以由柱体的体积公式可知，该圆柱的体积为 $$V=Sh=4\pi\times 4=16\pi.$$	教师出示例 1，学生自主分析. 学生求解后相互点评.	巩固所学，加深对公式的理解.
新课	**练习 1**　一个正四棱柱的底面是边长为 5 的正方形，侧棱长为 4，求其体积.	教师出示练习 1. 学生练习.	巩固所学.
	例 2　要用体积为 743 cm^3 的铁块铸造成若干个如图 2 所示的六角螺帽. 已知六角螺帽的底面正六边形边长是 12 mm，高是 10 mm，内孔直径是 10 mm. 那么约可以铸造出多少个这样的六角螺帽（不计损耗）?  图 2	教师出示例题. 教师引导学生分析模型，总结六角螺帽的体积是一个正六棱柱的体积与一个圆柱的体积之差.	通过例题提升学生应用数学知识解决实际问题的能力.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
	解 因为 $V_{正六棱柱}=\frac{1}{2}\times 12\times\sqrt{12^2-6^2}\times 6\times 10$ $\approx 3\ 741\ (\mathrm{mm}^3)$， $V_{圆柱}=\pi\times 5^2\times 10\approx 785\ (\mathrm{mm}^3)$， 所以这样一个六角螺帽的体积约为 $V=3\ 741-785=2.956\ (\mathrm{cm}^3)$. 因此用体积为 743 cm^3 的铁块约可以铸造这样的六角螺帽 $743\div 2.956\approx 251$（个）.	学生分组求解，展示答案. 师生点评.	
新课	**二、锥体的体积** **问题** 把三棱柱拆分成三个三棱锥，观察体积之间的关系.  图 3	学生观察教具，动手拆分三棱柱，教师再借助动画演示拆分过程. 教师指出：底面积和高都相等的两个锥体，它们的体积也相等.	动手操作，加深学生的直观印象.
	锥体的体积公式： $\boxed{V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh.}$ 其中，S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高.	学生小组讨论三个棱锥体积之间的关系，并尝试总结一般的锥体的体积公式. 师生共同总结公式，学生理解、记忆公式.	小组合作交流，提升用数学语言表达的能力.
	练习 2 已知圆锥的底面半径为 2，高为 3，求其体积.	学生练习，交流答案.	

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	**例 3**　已知正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的棱长都是 2，求该棱锥的体积.	教师出示例 3. 学生分组讨论，尝试求解.	学以致用，巩固锥体的体积公式.
	解　如图 4 所示，设 AC，BD 交于点 O，连接 SO，则 SO 是棱锥的高.  图 4 在 Rt△SOB 中， $OB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$， 所以 $SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}$ $=\sqrt{2}$， 则 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times2\times2\times\sqrt{2}$ $=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 即该棱锥的体积是 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.	教师梳理解题思路，板书解题过程.	规范解题步骤.
	例 4　如图 5 所示，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，用截面截出一个棱锥 $C\text{-}A'DD'$，求棱锥 $C\text{-}A'DD'$	教师出示例 4. 学生分组讨论，尝试求解.	

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>新课</td>
<td>
的体积与剩余部分的体积之比.

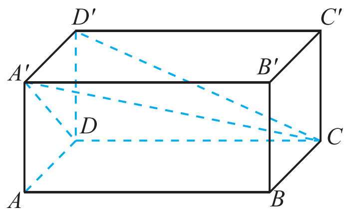


图 5

解　将该长方体看成四棱柱 $ADD'A'$-$BCC'B'$，设它的底面 $ADD'A'$ 的面积为 S，高为 h，则它的体积

$$V=Sh.$$

棱锥 C-$A'DD'$ 的底面积为 $\frac{1}{2}S$，高为 h，则它的体积

$$V_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}Sh=\frac{1}{6}V.$$

因此剩余部分的体积是

$$V-V_1=\frac{5}{6}V,$$

所以棱锥 C-$A'DD'$ 的体积与剩余部分的体积之比为 1∶5.

三、球体的体积

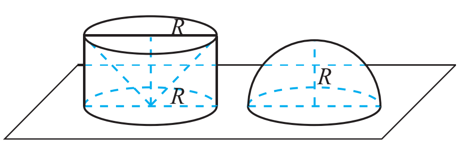


图 6

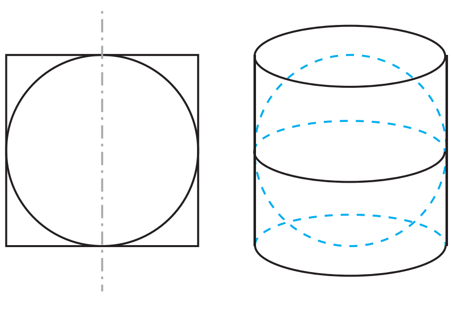
一个底面半径和高都为 R 的圆柱，挖去一个以上底面为底面、下底面圆心为顶点的圆锥的几何体与半径为 R
</td>
<td>
教师指定学生在黑板上求解，师生共同点评.

教师说理，展示球的体积公式的计算过程.

师生总结，得出球体的体
</td>
<td>
加深对所学知识的理解.

学以致用，进一步巩固柱体和锥体
</td>
</tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	的半球的体积相等，因此可得 $\frac{1}{2}V_{球}=\pi R^2\times R-\frac{1}{3}\pi R^2\times R=\frac{2}{3}\pi R^3$， 所以，可得球体的体积公式为 $\boxed{V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.}$ **练习 3** （1）已知球的半径为 2，求其体积. （2）若球的外切正方体的棱长为 6 cm，求该球的体积. （3）若球的内接正方体的棱长为 6 cm，求该球的体积. **例 5** 如图 7 所示的圆及其外切正方形绕图中虚线表示的对称轴旋转一周形成的几何体称为圆柱容球. 求证：在圆柱容球中，球的体积是圆柱体积的$\frac{2}{3}$，球的表面积是圆柱表面积的$\frac{2}{3}$.  图 7	积公式. 教师出示练习 3. 学生分析、回答问题. 教师给出例题，介绍圆柱容球的概念.	的体积公式. 不严格证明球的体积公式，降低难度，突出重点. 强化训练.

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td rowspan="2">新课</td><td>证明　设圆的半径为 R，球的体积与圆柱的体积分别为 $V_{球}$ 及 $V_{圆柱}$，球的表面积与圆柱的表面积分别为 $S_{球}$ 及 $S_{圆柱}$，则由题意有
$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^{3},$$
$$V_{圆柱}=\pi R^{2}\cdot 2R=2\pi R^{3},$$
所以 $V_{球}=\frac{2}{3}V_{圆柱}$.
又因为 $S_{圆柱}=2\pi R\cdot 2R+2\pi R^{2}=6\pi R^{2}$，所以 $S_{球}=4\pi R^{2}=\frac{2}{3}S_{圆柱}$.</td><td>学生证明，教师适当指导.
教师引导学生分析结果，对圆柱容球中两个结论进行对比、欣赏.
教师介绍阿基米德墓碑及阿基米德的故事.</td><td>学以致用，巩固球体的体积公式.
感受数学文化知识的无穷魅力.</td></tr>
<tr><td>练习 4　1. 正三棱柱的底面边长和高都为 4，求其体积.
2. 正四棱锥的底面边长和高都为 4，求其体积.
3. 已知圆柱的底面周长为 2π，高为 2，求其体积.
4. 圆锥的侧面展开图的半径为 4，圆心角为 $180°$，求其体积.
5. 球的大圆周长为 4π cm，求其体积.</td><td>学生独立完成练习 4 中的所有题目.
教师了解学生的完成情况，及时纠正学生出错的地方.</td><td>帮助学生巩固新知，便于教师了解学情.</td></tr>
<tr><td>小结</td><td>$V_{柱体}=Sh$.
$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$.
$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^{3}$.</td><td>师生共同总结本节课所学知识.</td><td>梳理知识，突出重点.</td></tr>
<tr><td>作业</td><td>必做题：本节练习 A 组所有题目.
选做题：本节练习 B 组所有题目.</td><td>学生标记作业.</td><td>巩固知识.</td></tr>
</table>