

5.2.2 同角三角函数的基本关系式

【教学目标】

- 1. 理解同角三角函数的基本关系式，会运用公式求值、化简、证明.
- 2. 提高用方程（组）解决问题的能力.
- 3. 体会知识间的联系性与整体性，发展数学运算、逻辑推理的核心素养.

【教学重点】

同角三角函数的基本关系式的推导及应用（求值、化简、恒等式的证明）.

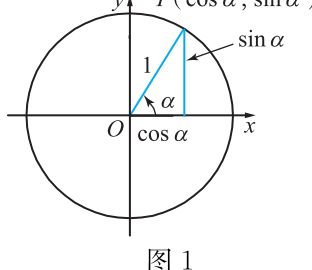
【教学难点】

灵活应用同角三角函数的基本关系式.

【教学方法】

本节课主要采用讲练结合的教学方法. 在教学过程中，要注意引导学生理解每个公式，关注公式的来龙去脉. 课堂中，充分发挥学生的主体作用，让学生在自主探究过程中，提高运用方程（组）解决问题的能力.

【教学过程】

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	复习三角函数的定义、单位圆和三角函数线、勾股定理.  图 1	结合图 1，教师带领学生回顾与本节课相关的知识点.	为推出 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ， $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ 这两个基本关系式做准备.
新课	在单位圆中，由三角函数的定义和勾股定理，可得同角三角函数的基本关系式： $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$	教师引导学生根据图 1，证明同角三角函数的基本关系式. 教师介绍 $\sin^2\alpha$ ， $\cos^2\alpha$ 的读法、写法，并让学生验证 30° ， 45° ， 60° 的正弦、余弦、正切值是否满足两个关系式. 教师引导学生明确：“同角”的概念与角的表达形式无关，如 $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ 也成立. 教师指出：当我们知道一个角的某个三角函数值时，利用这两	初步认识和应用同角三角函数的两个基本关系式. “同角”可以从两个方面理解：一是“角相同”；二是“任意一个角”. 指出同角三角函数基本关系式的

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	同角三角函数的基本关系式的应用主要包括三个方面. 一、求值 例 1 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ ，且角 α 是第二象限角，求角 α 的余弦和正切值. 解 由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ，得 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$ 因为角 α 是第二象限角， $\cos\alpha<0$ ，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5},$ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}.$ 例 2 已知 $\tan\alpha=-\sqrt{5}$ ，且角 α 是第二象限角，求角 α 的正弦和余弦值. 解 由题意，得 $\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, & \text{①} \\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\sqrt{5}. & \text{②}\end{cases}$ 由②式得 $\sin\alpha=-\sqrt{5}\cos\alpha$ ，代入①式得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{6}.$ 因为角 α 是第二象限角，所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{6},$ 又由②式得 $\begin{aligned}\sin\alpha &= -\sqrt{5}\cos\alpha \\ &= -\sqrt{5}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{30}}{6}.\end{aligned}$	个关系式和三角函数的定义，就可求出这个角的另外两个三角函数值. 此外，还可用它们化简三角函数式和证明三角恒等式. 教师鼓励学生自己解决例 1，并在开方时强调符号问题. 教师布置练习：本节练习 A 组第 1 题的第 2~3 小题. 教师总结：已知正弦值（或余弦值） $\xrightarrow{\text{根据平方关系}}$ 求余弦值（或正弦值） $\xrightarrow{\text{根据商数关系}}$ 求正切值. 教师引导学生通过解方程组完成例 2. 教师布置练习：本节练习 A 组第 1 题的第 4 小题. 教师总结：知正切值 $\xrightarrow{\text{解方程组}}$ 求余弦值（或正弦值）. 教师强调以下两点： 1. 注意同角三角函数基本关系式的变形应用. 2. 已知 $\sin\alpha$ ， $\cos\alpha$ ， $\tan\alpha$ 中的任意一个值，可以用方程（组）求出其余的两个值.	主要应用. 巩固同角三角函数的两个基本关系式的应用. 结合同角三角函数的基本关系式，利用方程组求解. 及时强调应用同角三角函数基本关系式求值的思路，为后续运用公式化简和证明相关问题积累经验.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	二、化简 例 3 化简： $\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\tan\theta-1}$. 解 原式 $=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}$ $=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta}}=\cos\theta.$ 三、证明 例 4 求证： (1) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=2\sin^2\alpha-1$ ； (2) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$ ； (3) $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$. 证明 (1) 原式左边 $=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)$ $=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$ $=\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)$ $=2\sin^2\alpha-1$ $=\text{右边}.$ 所以 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=2\sin^2\alpha-1$. (2) 原式右边 $=\tan^2\alpha(1-\cos^2\alpha)$ $=\tan^2\alpha-\tan^2\alpha\cos^2\alpha$ $=\tan^2\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha$ $=\tan^2\alpha-\sin^2\alpha$ $=\text{左边}.$ 所以 $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$. (3) 证法 1：因为 $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$ $=\frac{\cos^2x-(1-\sin^2x)}{(1-\sin x)\cos x}$ $=\frac{\cos^2x-\cos^2x}{(1-\sin x)\cos x}$ $=0.$	教师指出化简例 3 时，把正切函数化为正弦函数与余弦函数的商. 教师布置练习：本节练习 A 组第 2 题、练习 B 组第 1 题. 教师提示：证明恒等式一般从繁到简，从高次到低次. 顺序上，可以从左向右，或从右向左，或从两边向中间来证明. 可让学生自己先独立探索证明思路，再组织学生小组讨论. 教师在证明思路和解题格式上给予指导. 教师引导学生分析证法 1：用作差比较法，通过证明两式的差为 0 来证明两式相等.	在恒等式的证明中巩固同角三角函数的基本关系式. 一题多解，体会同角三角函数基本关系式的灵活应用.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	所以 $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$. 证法 2：因为 左边 $=\frac{\cos x}{1-\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\cos x}$ $=\frac{\cos^2x}{(1-\sin x)\cos x};$ 右边 $=\frac{1+\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1-\sin x}{1-\sin x}$ $=\frac{\cos^2x}{(1-\sin x)\cos x}.$ 所以左边=右边，即原等式成立.	教师引导学生分析证法 2：将原式的左边和右边转化为同分母的形式. 教师布置练习：本节练习 A 组第 3 题、练习 B 组第 2 题.	
小结	1. 同角三角函数的基本关系式： $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha.$ 2. 求值、化简和证明题目的思路与注意事项.	师生共同总结.	帮助学生养成及时总结、反思的好习惯.
作业	本节练习 B 组第 3 题.	学生课后完成.	巩固所学知识.