

5.2.1 任意角三角函数的定义

【教学目标】

- 1. 理解并掌握任意角三角函数的定义，会根据三角函数的定义求特殊角的三角函数，熟记三角函数在各象限的符号，掌握三角函数线的定义及画法.
- 2. 进一步体会数形结合的思想，提升直观想象、逻辑推理和数学抽象的核心素养.

【教学重点】

任意角三角函数的定义.

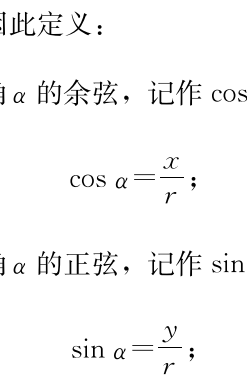
【教学难点】

单位圆及三角函数线.

【教学方法】

本节课主要采用启发引导与讲练结合式的教学方法，在复习锐角三角函数定义的基础上，定义任意角的三角函数，然后引导学生根据三角函数的定义求特殊角的三角函数，接着，根据象限内点的坐标符号和三角函数的定义导出三角函数值在各象限的符号，并把正弦、余弦、正切值分别用单位圆中的有向线段表示，使数与形密切结合起来，加强学生对三角函数定义的理解.

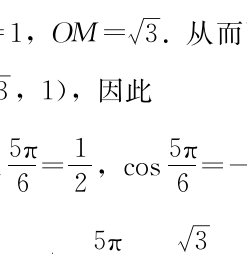
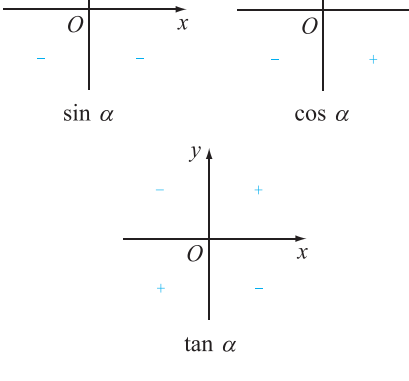
【教学过程】

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	复习锐角三角函数的定义.	教师提出：初中时我们学过锐角三角函数，当时是怎样定义的？ 学生小组讨论后回答.	复习旧知，引入新知.
新课	1. 任意角三角函数的定义 已知 α 是任意角，$P(x, y)$，$P'(x', y')$ 是角 α 的终边与两个半径不同的同心圆的交点，如图 1 所示. 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.  图 1 当角 α 不变时，不论点 P 在角 α 的终边上的位置如何，三个比值 $\frac{x}{r}$，$\frac{y}{r}$，$\frac{y}{x}$ 始终等于定值. 因此定义： $\frac{x}{r}$ 称为角 α 的余弦，记作 $\cos \alpha$，即 $\cos \alpha = \frac{x}{r};$ $\frac{y}{r}$ 称为角 α 的正弦，记作 $\sin \alpha$，即 $\sin \alpha = \frac{y}{r};$ $\frac{y}{x}$ 称为角 α 的正切，记作 $\tan \alpha$，即 $\tan \alpha = \frac{y}{x}.$	教师提问：当我们把锐角的概念推广为转角后，我们如何定义任意角的三角函数？ 教师引导学生理解： 如图 1 所示，由相似三角形对应边成比例得， $\frac{ x }{r} = \frac{ x' }{r'}$ ， $\frac{ y }{r} = \frac{ y' }{r'}$ ， $\frac{ y }{ x } = \frac{ y' }{ x' }$. 由于点 P ， P' 在同一象限内，所以它们的坐标符号相同，因此， $\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}$ ， $\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$ ， $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$. 所以三个比值 $\frac{x}{r}$ ， $\frac{y}{r}$ ， $\frac{y}{x}$ 只依赖于 α 的大小，与点 P 在角 α 终边上的位置无关.	说明三角函数定义的理论根据.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	依照上述定义，对于每一个确定的角 α，都分别有唯一的余弦值、正弦值与之对应；当 $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 时，都有唯一的正切值与之对应，所以这三个对应关系都是以角 α 为自变量的函数，分别称为角 α 的余弦函数、正弦函数和正切函数. 根据三角函数的定义，可计算三角函数值. 例 1 已知角 α 的终边经过点 $P(2, -3)$，求 $\sin \alpha$，$\cos \alpha$ 和 $\tan \alpha$. 解 设 $x=2$，$y=-3$，则 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$. 于是 $\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{-3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13},$ $\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13},$ $\tan \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{3}{2}.$ 例 2 求下列各角的正弦、余弦和正切值. (1) 0; (2) π; (3) $\frac{3\pi}{2}$. 解 (1) 角 0 的终边在 x 轴正半轴上，在 x 轴的正半轴上取点 $(1, 0)$，所以 $r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$，因此 $\sin 0 = \frac{0}{1} = 0, \cos 0 = \frac{1}{1} = 1,$ $\tan 0 = \frac{0}{1} = 0.$ (2) 角 π 的终边在 x 轴负半轴上，在 x 轴的负半轴上取点 $(-1, 0)$，所以 $r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$，因此 $\sin \pi = \frac{0}{1} = 0, \cos \pi = \frac{-1}{1} = -1,$ $\tan \pi = \frac{0}{-1} = 0.$ (3) 角 $\frac{3\pi}{2}$ 的终边在 y 轴负半轴上，在 y	教师引导学生理解三角函数的定义. 教师依据函数定义说明角 α 与三角函数值的对应关系. 教师提示学生根据三角函数的定义，求三角函数值. 教师提问：如果没有给出角的终边经过的点的坐标，如何求出一些特殊角的三角函数值呢？ 学生讨论，尝试求解例 2.	正式引出任意角三角函数的概念. 巩固三角函数的定义.

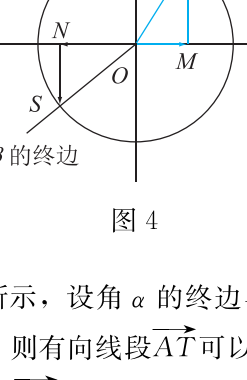
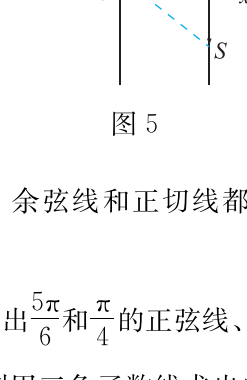
续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	轴的负半轴上取点 $(0, -1)$，所以 $r = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$，因此 $\sin \frac{3\pi}{2} = -1, \cos \frac{3\pi}{2} = 0, \tan \frac{3\pi}{2} \text{ 不存在}.$ 例 3 求 $\frac{5\pi}{6}$ 的正弦、余弦和正切值. 解 如图 2 所示，在 $\frac{5\pi}{6}$ 的终边上取点 P，使 $OP=2$.  图 2 作 $PM \perp Ox$，则在 $\text{Rt}\triangle OMP$ 中， $\angle POM = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$ 因此 $MP=1$，$OM=\sqrt{3}$. 从而可知 P 的坐标为 $(-\sqrt{3}, 1)$，因此 $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$ $\tan \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$ 2. 角的正弦、余弦与正切值在各象限的符号  图 3	教师结合图 2 进行讲解，学生分析、理解. 教师提出：从定义与实例都可以看出，任意角的正弦、余弦与正切值，都既有可能是正数，也有可能是负数，还可能为 0. 它们的符号与什么有关？试总结出任意角的正弦、余弦与正切值符号的规律. 学生分析任意角的正弦、余弦与正切值在各象限的符号，作出类似图 3 的示意图.	帮助学生加深对三角函数定义的理解.

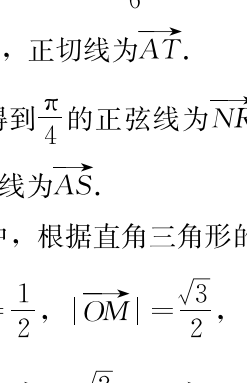
续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	例 4 确定下列各值的符号： (1) $\cos 260^\circ$; (2) $\sin(-\frac{\pi}{3})$; (3) $\tan(-672^\circ 20')$; (4) $\tan \frac{10\pi}{3}$. 解 (1) 因为 260° 是第三象限角，所以 $\cos 260^\circ < 0$; (2) 因为 $-\frac{\pi}{3}$ 是第四象限角，所以 $\sin(-\frac{\pi}{3}) < 0$; (3) 由 $-672^\circ 20' = 47^\circ 40' + (-2) \times 360^\circ$，可知 $-672^\circ 20'$ 是第一象限角，所以 $\tan(-672^\circ 20') > 0$; (4) 由 $\frac{10\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi$，可知 $\frac{10\pi}{3}$ 是第三象限角，所以 $\tan \frac{10\pi}{3} > 0$. 例 5 设 $\sin \theta < 0$ 且 $\tan \theta > 0$，确定角 θ 是第几象限角. 解 因为 $\sin \theta < 0$，所以角 θ 的终边在第三、四象限，或 y 轴负半轴上. 又因为 $\tan \theta > 0$，所以角 θ 的终边在第一、三象限. 因此满足 $\sin \theta < 0$ 且 $\tan \theta > 0$ 的角 θ 是第三象限角. 练习 确定下列三角函数值的符号： (1) $\sin(-\frac{\pi}{4})$; (2) $\cos 130^\circ$; (3) $\tan \frac{4\pi}{3}$. 3. 单位圆与三角函数线 半径为 1 的圆称为单位圆. 在平面直角坐标系中，坐标满足 $x^2 + y^2 = 1$ 的点组成的集合是一个单位圆. 因此，如果角 α 的终边与单位圆的交点为 P，由三角函数的定义可	教师指出：在确定某一三角函数值的符号时，可以先判断对应的角是第几象限角，再根据任意角的正弦、余弦与正切值在各象限的符号规律进行判断. 学生小组讨论，得出结果，教师给予点评，并强调 $\sin \theta < 0$ 时，不要忘记 θ 的终边可能落在 y 轴负半轴上. 学生完成练习后，教师可让学生用计算器验证各三角函数值的符号.	巩固学生对任意角的正弦、余弦与正切值在各象限符号的理解. 提升学生逻辑推理的核心素养.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	知，点 P 的坐标为 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. 这就是说，角 α 的余弦和正弦分别等于角 α 的终边与单位圆交点的横坐标和纵坐标. 如图 4 所示，习惯上，我们称有向线段 $\overrightarrow{OM}$ 为角 α 的余弦线，称有向线段 $\overrightarrow{MP}$ 为角 α 的正弦线.  图 4 如图 5 所示，设角 α 的终边与直线 $x=1$ 交于点 T，则有向线段 $\overrightarrow{AT}$ 可以直观地表示 $\tan \alpha$，因此 $\overrightarrow{AT}$ 称为角 α 的正切线.  图 5 正弦线、余弦线和正切线都称为三角函数线. 例 6 作出 $\frac{5\pi}{6}$ 和 $\frac{\pi}{4}$ 的正弦线、余弦线和正切线，并利用三角函数线求出它们的正弦、余弦和正切值. 解 如图 6 所示，在平面直角坐标系中作出单位圆以及直线 $x=1$，单位圆与 x 轴交于点 $A(1, 0)$.	教师介绍有向线段和三角函数线的内容. 教师提问：角 β 的余弦线是 $\overrightarrow{ON}$ ，正弦线是 $\overrightarrow{NS}$. 你能得出哪些信息？ 学生回答： $\cos \beta < 0$ ， $\sin \beta < 0$ ，且 $ \cos \beta > \cos \alpha $ ， $ \sin \alpha > \sin \beta $. 教师提问：角 β 的正切线是 $\overrightarrow{AS}$ ，你能得出哪些信息？ 学生回答： $\tan \beta < 0$ ，且 $ \tan \beta < \tan \alpha $. 学生分析、解决问题. 教师对个别学生进行指导.	引导学生感受三角函数线的直观性及其应用. 引导学生体会三角函数线作图的机会.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	 图 6 作 $\frac{5\pi}{6}$ 的终边与单位圆的交点 P，过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M；延长线段 PO，交直线 $x=1$ 于 T，则 $\frac{5\pi}{6}$ 的正弦线为 $\overrightarrow{MP}$，余弦线为 $\overrightarrow{OM}$，正切线为 $\overrightarrow{AT}$. 类似可得到 $\frac{\pi}{4}$ 的正弦线为 $\overrightarrow{NR}$，余弦线为 $\overrightarrow{ON}$，正切线为 $\overrightarrow{AS}$. 在图 6 中，根据直角三角形的知识可知， $ \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}, \overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \overrightarrow{AT} = \frac{\sqrt{3}}{3},$ $ \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NR} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \overrightarrow{AS} = 1, \text{ 所以}$ $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$ $\tan \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3};$ $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \frac{\pi}{4} = 1.$	教师引导学生根据三角函数线的定义作出 $\frac{5\pi}{6}$ 的正弦线、余弦线和正切线. 学生独立作出 $\frac{\pi}{4}$ 的正弦线、余弦线和正切线，教师检查学生的完成情况. 教师强调根据三角函数线得出三角函数值时，要注意三角函数值的符号.	巩固三角函数线的定义及应用. 为学生提供一个巩固三角函数线作图的机会.
小结	回忆本节课所学知识点： 1. 任意角三角函数的定义. 2. 正弦、余弦与正切在各象限的符号. 3. 单位圆与三角函数线.	教师引导学生总结本节所学知识，反思易错点.	帮助学生养成良好的学习习惯.
作业	本节练习 A 组第 1~3 题. 本节练习 B 组第 2~3 题.	教师布置作业，学生课下完成.	进一步巩固所学知识.