

4.1.1 实数指数（二）

【教学目标】

- 1. 了解 n 次根式、分数指数幂、有理数指数幂及实数指数幂的概念；理解实数指数幂的运算法则.
- 2. 会对根式、分数指数幂进行互化. 提升观察、分析、归纳等逻辑思维能力.
- 3. 能运用联系的观点看问题.

【教学重点】

分数指数幂的概念以及分数指数幂的运算法则.

【教学难点】

分数指数幂的概念.

【教学方法】

本节课在引入分数指数幂时，先讲方根的概念，以及根式具有的性质. 在此基础上，引入分数指数幂的概念，从而将指数幂推广到有理数指数幂的范围. 在学生掌握有理数指数幂的运算法则后，将有理数指数幂推广到实数指数幂. 考虑到学生的实际情况，并没有给出这一推广过程的严格证明.

【教学过程】

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 整数指数幂的概念. $a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a$ (n 个 a 连乘); $a^0 = 1$ ($a \neq 0$); $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0, n \in \mathbf{N}_+$). 2. 运算法则: $a^m a^n = a^{m+n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(ab)^m = a^m b^m$.	教师指出：上节课我们把正整数指数幂推广到了整数指数幂，那么我们能不能把整数指数幂推广到分数指数幂，进而推广到有理数指数幂和实数指数幂呢？这节课我们就来探讨这个问题. 教师引导学生复习一下上节课所学内容. 学生回答教师提出的问题，教师及时给予评价.	提出问题，引入本节课. 复习上节内容.
新课	一、根式的有关概念 1. 定义：如果 $x^n = a$ ($n > 1, n \in \mathbf{N}$)，则 x 称为 a 的 n 次方根. 例如： (1) 由 $3^2 = 9$ 知，3 是 9 的二次方根（平方根）； 由 $(-3)^2 = 9$ 知，-3 也是 9 的二次方根（平方根）； (2) 由 $(-5)^3 = -125$ 知，-5 是 -125 的三次方根（立方根）； (3) 由 $6^4 = 1\,296$ 知，6 是 1 296 的 4 次方根.	教师板书课题. 教师通过举例让学生进一步理解方根的概念.	引入方根的概念. 加深对方根概念的理解，为后续引入分数指数幂做准备.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	2. 有关结论： (1) 当 n 为奇数时：正数的 n 次方根为正数，负数的 n 次方根为负数，记作： $x = \sqrt[n]{a}$. (2) 当 n 为偶数时，正数的 n 次方根有两个（互为相反数），记作： $x = \pm \sqrt[n]{a}$. (3) 负数没有偶次方根. (4) 0 的任何次方根都为 0. 当 $\sqrt[n]{a}$ 有意义时， $\sqrt[n]{a}$ 称为根式， n 称为根指数. 正数 a 的正 n 次方根称为 a 的 n 次算术根. 例如： $\sqrt[3]{2}$ 称为 2 的 3 次算术根； $\sqrt[3]{-2}$ 不叫根式，因为它没有意义的. 二、根式的性质 (1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$. 例如， $(\sqrt[3]{27})^3 = 27, (\sqrt[5]{-3})^5 = -3$. (2) 当 n 为奇数时， $\sqrt[n]{a^n} = a$ ； 当 n 为偶数时， $\sqrt[n]{a^n} = a = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$ 例如： $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \sqrt[3]{2^3} = 2$ ； $\sqrt{5^2} = 5, \sqrt[4]{(-3)^4} = -3 = 3$. 观察下面的运算： $(a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{1}{3} \times 3} = a, \quad \text{①}$ $(a^{\frac{2}{3}})^3 = a^{\frac{2}{3} \times 3} = a^2. \quad \text{②}$ 上面两式的运算，用到了法则 $(a^m)^n = a^{mn}$ ，但无法用整数指数幂来解释，这应该如何处理？①式的含义是 $a^{\frac{1}{3}}$ 连乘 3 次得到 a ，所以 $a^{\frac{1}{3}}$ 可以看成 a 的 3 次方根；②式的含义是 $a^{\frac{2}{3}}$ 连乘 3 次得到 a^2 ，所以 $a^{\frac{2}{3}}$ 可以看成 a^2 的 3 次方根.	学生在教师的引导下进一步理解方根的概念. 引导学生重新构建根式、根指数的概念. 教师强调当 $\sqrt[n]{a}$ 有意义时， $\sqrt[n]{a}$ 才称为根式. 教师引导学生通过具体例子理解根式的性质. 教师用自然语言叙述根式的性质. 学生形成思维困惑. 在教师的引导下，学生寻找合理的解决方法.	引入根式、根指数的概念. 加深学生对根式性质的理解. 设置思维障碍，使学生积极寻找解决方法，从而调动学生探索新知识的积极性.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	因此我们规定 $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, 以使运算合理. 三、分数指数幂 一般地，我们规定： $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a > 0)$. $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, n, m \in \mathbf{N}_+, \text{且 } \frac{m}{n} \text{ 为既约分数}).$ $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \quad (a > 0, n, m \in \mathbf{N}_+, \text{且 } \frac{m}{n} \text{ 为既约分数}).$ 四、实数指数幂的运算法则 (1) $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; (2) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$; (3) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$. 以上 a^α, a^β 中， $a > 0, b > 0$ ，且 α, β 为任意实数. 例 1 计算： $8^{\frac{3}{5}} \times 8^{\frac{2}{5}} = 8^{\frac{3+2}{5}} = 8^1 = 8$; $8^{\frac{2}{3}} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = 2^2 = 4$; $3\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[9]{3} = 3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{9}} = 3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}} = 3^2 = 9$; $(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{4}})^3 = (a^{\frac{2}{3}})^3 \times (b^{\frac{1}{4}})^3 = a^2 b^{\frac{3}{4}}$. 例 2 利用函数型计算器计算（精确到 0.01）： (1) $0.2^{1.52}$ ； (2) 3.14^{-2} ； (3) $3.1^{\frac{2}{3}}$. 例 3 利用函数型计算器计算函数值. 已知 $f(x) = 2.71^x$ ，求 $f(-3), f(-2), f(-1), f(2), f(3)$ （精确到 0.001）. 练习 本节练习 A 组第 3 题及练习 B 组第 3 题.	学生在教师的引导下，由特殊到一般，积极构建分数指数幂的概念. 在教师的引导下，类比负整数指数幂的定义，得出负分数指数幂的定义. 教师指出：至此，我们把整数指数幂推广到了有理数指数幂. 还可以将有理数指数幂推广到实数指数幂. 教师引导学生理解实数指数幂的运算法则. 学生通过求解例 1，进一步熟悉实数指数幂的运算法则. 教师引导学生利用函数型计算器来解答例 2. 教师请学生小组合作解答例 3.	通过教师引导，学生找到使运算合理的解决方法. 引入正分数指数幂的概念. 类比负整数指数幂的定义，引入负分数指数幂的定义. 将有理数指数幂推广到实数指数幂，并给出实数指数幂的运算法则. 帮助学生熟练掌握函数型计算器的使用方法. 例 3 设置的目的是渗透指数函数的概念，为下一节的教学做准备.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
小结	1. 根式 $\longleftrightarrow$ 分数指数幂 2. 指数幂的推广过程. 3. 利用函数型计算器求 a^b 的值.	学生在教师的引导下回顾本节主要内容，深入理解根式和分数指数幂的概念，厘清指数幂的推广过程，并适当回顾计算器的使用方法.	概括本节的重要知识，便于学生理解、记忆.
作业	本节练习 B 组第 1~2 题.	学生课后完成.	对本节内容加以巩固.