3.3　函数的应用

【教学目标】

1. 会应用一次函数、分段函数和二次函数解决简单的实际问题.

2. 初步掌握从实际问题中抽象出一次函数、分段函数和二次函数模型解决简单实际问题的方法，提升数学建模的核心素养.

【教学重点】

应用函数知识解决一些简单的实际问题.

【教学难点】

从实际问题中抽象出函数模型.

【教学方法】

本节课主要采用讲练结合法，将四个例题与练习穿插在一起，介绍一次函数、分段函数和二次函数的应用. 教学中，注意培养学生的审题能力，以及从实际问题中抽象出数学模型解决问题的能力.

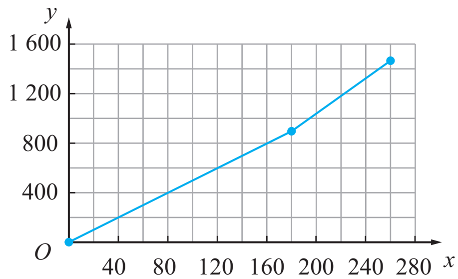
【教学过程】

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	我们前面学习了一次函数、分段函数、二次函数的图象与性质，下面介绍几个函数应用的例子.		开门见山，直接引入本节课的主要内容.
	例 1　火车从北京站开出 12 km 后，以 300 km/h 的速度匀速行驶. 试写出火车运行总路程 s 与作匀速运动的时间 t 之间的关系. $s=12+300t$，$t\geqslant 0$. **练习 1**　本节习题第 1～2 题. **例 2**　北京市自 2014 年 5 月 1 日起，居民用水实行阶梯水价制度. 其中年用水量不超过 180 m^3 的部分，	教师提出问题，引导学生思考：路程、速度与时间之间的函数关系是什么？	例 1 是一次函数模型的应用问题，难度较小，可让学生自己解决.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	综合用水单价为 5 元/m^3；超过 180 m^3 但不超过 260 m^3 的部分，综合用水单价为 7 元/m^3. 如果北京市一居民年用水量为 x m^3，其要缴纳的水费为 $f(x)$ 元. 假设 $0\leqslant x\leqslant 260$，试写出 $f(x)$ 的解析式，并作出 $f(x)$ 的图象.  **解** 如果 $x\in[0, 180]$，则 $f(x)=5x$； 如果 $x\in(180, 260]$，按照题意有 $f(x)=5\times180+7(x-180)=7x-360$. 因此 $f(x)=\begin{cases}5x, & x\in[0, 180],\\ 7x-360, & x\in(180, 260].\end{cases}$ 注意到 $f(x)$ 在不同的区间上，解析式都是一次函数的形式，因此 $y=f(x)$ 在每个区间上的图象都是直线的一部分，又因为 $f(180)=5\times180=900$， $f(260)=7\times260-360=1\ 460$，	教师提问，学生回答： （1）用水量为 100 m^3 时，要缴纳多少水费？ （2）用水量为 200 m^3 时，要缴纳多少水费？ （3）用水量为 x m^3 时，要缴纳多少水费？	例 2 是分段函数的应用问题. 可借助本题，号召学生节约用水. 通过问题（1）（2）（3），由特殊到一般，降低学生的理解难度.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	由此可作出函数 $f(x)$ 的图象，如图 1 所示.  图 1 **例 3**　某单位计划建筑一矩形围墙. 现有材料可筑墙的总长度为 l，如果要使墙围出的面积最大，则矩形的长、宽各等于多少？ **解**　设矩形围墙的长为 x 时，场地的面积为 S. 因为矩形的周长要为 l，所以矩形的宽为 $\frac{1}{2}(l-2x)$，由 $\begin{cases} x>0, \\ \frac{1}{2}(l-2x)>0 \end{cases}$ 可得 $0<x<\frac{1}{2}$. 又因为 $S=\frac{1}{2}(l-2x)x=-x^2+\frac{l}{2}x$ $=-\left[x^2-\frac{l}{2}x+\left(\frac{l}{4}\right)^2-\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]$ $=-\left(x-\frac{l}{4}\right)^2+\frac{l^2}{16}$.	教师引导学生通过画图分析题意： （1）设矩形的长是 x，则宽为多少？ （2）面积如何表达？它是什么函数？如何求它的最大值？ 教师简单点拨，学生合作完成. 教师展示具体求解过程. 教师引导学生回忆二次函数的配方过程.	例 3 是二次函数的最值问题.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	所以该函数在 $x=\frac{l}{4}$ 时，$S_{\max}=\frac{l^2}{16}$，这时矩形的宽也为$\frac{l}{4}$. 即这个矩形是边长等于$\frac{l}{4}$的正方形时，所围出的场地面积最大. 配方法的几个关键步骤： (1) 提系数； (2) 所配常数为一次项系数一半的平方. **练习 2**　本节习题第 5 题. **例 4**　某海边附近的一家公司有 300 辆电瓶车可出租，每辆电瓶车每天租金为 20 元时，能够全部租出. 恰逢旅游旺季，公司计划提高租金，已知每辆电瓶车每增加 2 元，电瓶车出租数就会减少 10 辆. 不考虑其他因素时，公司将电瓶车的租金提高到多少元时，每天的租金总收入最高？ **解**　设提高 x 个 2 元，则将有 $10x$ 辆电瓶车空出，且租金总收入为 $y=(20+2x)(300-10x)$ $=-20x^2+600x-200x+6\ 000$ $=-20(x^2-20x+100-100)+6\ 000$ $=-20(x-10)^2+8\ 000$. 由此得到，$x=10$ 时，$y_{\max}=8\ 000$，即每辆电瓶车的租金为 20+	对于例 4，教师带领学生详细分析题意，解题时只点拨如何假设未知量，启发学生讨论并尝试独立解答. 讲解完例 4 后，教师引导学生总结解函数应用题的一般步骤： 1. 设未知数（确定自变量和因变量）； 2. 找等量关系，列出函数关系式； 3. 化简，整理成标准形式（一次函数、二次函数等）；	函数最值问题既是函数应用中的重点也是难点，此题的目的是突破学生这一思维障碍，提高学生的建模能力，同时进一步巩固配方法在二次函数中的应用. 梳理解题步骤，明确解题思路.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	$10\times2=40$ 元时，每天租金的总收入最高，为 8 000 元. **练习 3** 本节习题第 8 题.	4. 利用函数知识，求解； 5. 写出结论.	
小结	1. 总结已学过的一些函数模型的特点，如一次函数、分段函数、二次函数. 2. 求解函数应用题的一般步骤.	学生阅读教材，畅谈本节课的收获，教师引导学生总结本节课的知识点.	引导学生养成及时总结、反思的好习惯.
作业	本节习题第 3 题、第 4 题、第 7 题.	学生课后完成.	巩固本节内容.