

4.1.1 实数指数（二）

【教学目标】

1. 了解 n 次根式、分数指数幂、有理数指数幂及实数指数幂的概念；理解实数指数幂的运算法则.
2. 会对根式、分数指数幂进行互化. 提升观察、分析、归纳等逻辑思维能力.
3. 能运用联系的观点看问题.

【教学重点】

分数指数幂的概念以及分数指数幂的运算法则.

【教学难点】

分数指数幂的概念.

【教学方法】

本节课主要采用问题解决法. 在引入分数指数幂时, 先讲方根的概念, 根据方根的定义, 得到根式具有的性质. 在利用根式的性质对根式化简的过程中, 引导学生注意发现并归纳其变形特点, 进而由特殊情形归纳出一般规律. 在对根式的性质进行练习以后, 为了解决运算的合理性, 引入分数指数幂的概念, 从而将指数幂推广到有理数范围. 在学生掌握有理数指数幂的运算法则后, 将有理数指数幂推广到实数指数幂. 考虑到中等职业学校学生的实际情况, 并没有给出这一推广过程的严格证明.

【教学过程】

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	<p>1. 整数指数幂的概念.</p> $a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a \quad (n \text{ 个 } a \text{ 连乘});$ $a^0 = 1 \quad (a \neq 0);$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, n \in \mathbf{N}_+).$ <p>2. 运算法则:</p> $a^m a^n = a^{m+n};$	<p>教师指出: 上节课我们把正整数指数幂推广到了整数指数幂, 那么我们能不能把整数指数幂推广到分数指数幂, 进而推广到有理数指数幂和实数指数幂呢? 这节</p>	<p>提出问题, 引入本课题.</p> <p>复习上节内容.</p>

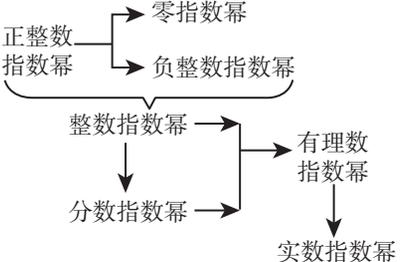
续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	$(a^m)^n = a^{mn};$ $(ab)^m = a^m b^m.$	<p>课我们就来探讨这个问题.</p> <p>教师引导学生复习一下上节课所学内容.</p> <p>学生回答教师提出的问题, 教师及时给予评价.</p>	
新课	<p>一、根式的有关概念</p> <p>1. 定义: 一般地, 若 $x^n = a$ ($n > 1$, $n \in \mathbf{N}$), 则 x 称为 a 的 n 次方根.</p> <p>例如:</p> <p>(1) 由 $3^2 = 9$ 知, 3 是 9 的二次方根 (平方根);</p> <p>由 $(-3)^2 = 9$ 知, -3 也是 9 的二次方根 (平方根);</p> <p>(2) 由 $(-5)^3 = -125$ 知, -5 是 -125 的三次方根 (立方根);</p> <p>(3) 由 $6^4 = 1\ 296$ 知, 6 是 $1\ 296$ 的 4 次方根.</p> <p>2. 有关结论:</p> <p>(1) 当 n 为奇数时: 正数的 n 次方根为正数, 负数的 n 次方根为负数, 记作:</p> $x = \sqrt[n]{a}.$ <p>(2) 当 n 为偶数时, 正数的 n 次方根有两个 (互为相反数), 记作:</p> $x = \pm \sqrt[n]{a}.$	<p>教师板书课题.</p> <p>教师通过举例让学生进一步理解方根的概念.</p> <p>学生在教师的引导下进一步理解根式的概念.</p>	<p>引入方根的概念, 为下一步引入分数指数做准备.</p> <p>加深对方根概念的理解, 并为进一步说明下面的结论做铺垫.</p> <p>由方根的概念引入其数学记法, 方便之后引入根式的概念.</p>

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>(3) 负数没有偶次方根.</p> <p>(4) 0 的任何次方根都为 0.</p> <p>当$\sqrt[n]{a}$有意义时,$\sqrt[n]{a}$称为根式,n称为根指数.</p> <p>正数a的正n次方根称为a的n次算术根.</p> <p>例如:$\sqrt[3]{2}$称为 2 的 3 次算术根; $\sqrt[4]{-2}$不叫根式,因为它没有意义的.</p> <p>二、根式的性质</p> <p>(1) $(\sqrt[n]{a})^n = a$.</p> <p>例如,$(\sqrt[3]{27})^3 = 27$, $(\sqrt[5]{-3})^5 = -3$.</p> <p>(2) 当n为奇数时,$\sqrt[n]{a^n} = a$; 当n为偶数时,$\sqrt[n]{a^n} = a = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$</p> <p>例如:$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$, $\sqrt[3]{2^3} = 2$; $\sqrt{5^2} = 5$, $\sqrt[4]{(-3)^4} = -3 = 3$.</p> <p>观察下面的运算:</p> $(a^{\frac{1}{3}})^3 = a^{\frac{1}{3} \times 3} = a, \quad \text{①}$ $(a^{\frac{2}{3}})^3 = a^{\frac{2}{3} \times 3} = a^2. \quad \text{②}$ <p>上面两式的运算,用到了法则$(a^m)^n = a^{mn}$,但无法用整数指数幂来解释,但是①式的含义是$a^{\frac{1}{3}}$连乘 3 次得到a,所以$a^{\frac{1}{3}}$可以看成a的 3 次方根;②式的含义是$a^{\frac{2}{3}}$连乘 3 次得到a^2,所以$a^{\frac{2}{3}}$可以看成a^2的 3 次方根.</p>	<p>引导学生重新构建根式、根指数的概念.教师强调当$\sqrt[n]{a}$有意义时,$\sqrt[n]{a}$才称为根式.</p> <p>教师引导学生理解根式的性质,通过实例演示,将根式的性质应用到运算之中.</p> <p>教师用自然语言叙述根式的性质.</p> <p>学生形成思维困惑.在教师的引导下,学生寻找解惑途径.</p>	<p>引入根式、根指数的概念.</p> <p>加深学生对根式性质的理解.</p> <p>设置思维障碍,使学生积极寻找解决途径,从而调动学生探索新知识的积极性.</p>

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>因此我们规定</p> $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}, a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2},$ <p>以使运算合理.</p> <p>三、分数指数幂</p> <p>一般地, 我们规定:</p> $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a > 0),$ $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a^m}) = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in \mathbf{N}_+, \text{ 且 } \frac{m}{n} \text{ 为既约分数}).$ $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \quad (a > 0, m, n \in \mathbf{N}_+, \text{ 且 } \frac{m}{n} \text{ 为既约分数}).$ <p>四、实数指数幂的运算法则</p> <p>(1) $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$;</p> <p>(2) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$;</p> <p>(3) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$.</p> <p>以上 a^α, a^β 中, $a > 0, b > 0$, 且 α, β 为任意实数.</p> <p>例 1 计算:</p> $8^{\frac{3}{5}} \times 8^{\frac{2}{5}} = 8^{\frac{3+2}{5}} = 8^1 = 8;$ $8^{\frac{2}{3}} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = 2^2 = 4;$ $3\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{3} = 3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 3^2 = 9;$ $(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{4}})^3 = (a^{\frac{2}{3}})^3 \times (b^{\frac{1}{4}})^3 = a^2 b^{\frac{3}{4}}.$ <p>例 2 利用函数型计算器计算 (精确到 0.001):</p>	<p>学生在教师的引导下, 由特殊到一般, 积极构建分数指数幂的概念.</p> <p>在教师的引导下, 类比负整数指数幂的定义, 得出负分数指数幂的概念.</p> <p>教师指出: 至此, 我们把整数指数幂推广到了有理数指数幂. 有理数指数幂还可以推广到实数指数幂.</p> <p>学生形成实数指数幂的概念.</p> <p>学生通过求解例 1, 进一步熟悉实数指数幂的运算法则.</p> <p>教师引导学生利用函数型计算器来求解</p>	<p>通过教师引导, 学生找到使运算合理的途径.</p> <p>引入正分数指数幂的概念.</p> <p>类比负整数指数幂的定义, 引入负分数指数幂的概念.</p> <p>将有理数指数幂推广到实数指数幂, 并给出实数指数幂的运算法则.</p> <p>帮助学生熟练掌握函数型计算器的</p>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>(1) $0.2^{1.5^2}$; (2) 3.14^{-2}; (3) $3.1^{\frac{2}{3}}$.</p> <p>例 3 利用函数型计算器计算函数值. 已知 $f(x)=2.71^x$, 求 $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(3)$ (精确到 0.001).</p> <p>练习 本节练习 A 组第 3 题及练习 B 组第 3 题.</p>	<p>例 2.</p> <p>教师请学生小组合作完成例 3.</p>	<p>使用.</p> <p>例 3 设置的目的是渗透指数函数的概念, 为下一节的教学做准备.</p>
小结	<p>1. 根式 \longleftrightarrow 分数指数幂</p> <p>2. 指数幂的推广过程.</p>  <p>3. 利用函数型计算器求 a^b 的值.</p>	<p>学生在教师的引导下回顾本节主要内容, 深入理解根式和分数指数幂的概念, 厘清实数指数幂的推广过程, 并适当回顾计算器的使用方法.</p>	<p>简洁明了地概括本节的重要知识, 便于学生理解、记忆.</p>
作业	<p>必做题: 本节练习 B 组第 1 题. 选做题: 本节练习 B 组第 2 题.</p>	<p>学生课后完成.</p>	<p>针对学生实际, 对课后书面作业实施分层设置.</p>