

5.1.2 弧度制

【教学目标】

- 1. 了解弧度制的概念以及弧长公式，理解角度制与弧度制的换算.
- 2. 理解角的弧度数与实数之间的一一对应关系.
- 3. 体会等价转化与辩证统一的思想，提升逻辑推理、数学抽象的核心素养.

【教学重点】

弧度制的概念，掌握弧度制与角度制的换算.

【教学难点】

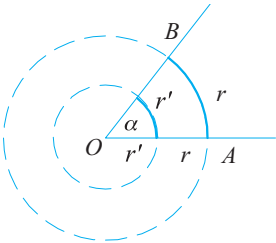
弧度制的概念.

【教学方法】

本节课采用类比教学法，在复习角度制的基础上引入弧度制，探究它们之间的换算方法，使学生认识它们之间相互联系、辩证统一的关系. 通过弧度制与角度制的比较，使学生加深对弧度制的认识，逐步适应用弧度制度量角.

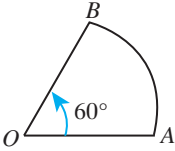
【教学过程】

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	复习初中学过的角度制.	教师提问：初中学过角度制，1 度角是怎么定义的？ 学生回答：把一圆周 360 等分，则其中一份所对的圆心角是 1 度角. 且 $1^{\circ}=60'$ ， $1'=60''$. 教师指出：在数学和其他科学中我们还经常用到另一种度量角的单位制——弧度制.	复习角度制. 引出弧度制.
新课	1. 弧度制的度量单位——1 弧度的角 (1) 定义：等于半径长的圆弧	教师在列举长度、质量等度量单位的基础上给出 1 弧度的定义.	引入 1 弧度角的概念.

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	所对的圆心角称为 1 弧度的角. 例如, 设 $\widehat{AB}$ 的长等于半径 r, $\widehat{AB}$ 所对的圆心角就是 1 弧度的角 (图 1), 记作 1 rad.  图 1 (2) 弧长与半径的比值 $\frac{l}{r}$ 等于一个常数, 只与 α 的大小有关, 与半径长无关. 2. 角度制与弧度制的换算 周角 $= 360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$, 即	教师举例: 若圆心角所对的弧长 $l = 2r$, 那么圆心角的弧度数就是 2 rad. 若圆心角所对的弧长 $l = 3r$, 那么圆心角的弧度数是多少? 学生回答: 3 rad. 若圆心角所对的弧长就是 l, 那么圆心角的弧度数是多少? 学生回答: $\frac{l}{r} \text{ rad}$. 教师引导学生考察圆心角、弧长和半径之间的关系: 如图 1 所示, 两个大小不同的同心圆中圆心角为 α, 设 $\alpha = n^\circ$, 则 $l = n \frac{2\pi r}{360}, l' = n \frac{2\pi r'}{360},$ 因此, $\frac{l}{r} = \frac{l'}{r'} = n \frac{2\pi}{360}$. 所以, 对于任何一个圆心角 α, 所对弧长与半径的比值是一个仅与角 α 的大小有关的常数. 教师提问: 圆的周长所对的圆心角是多少弧度? 学生回答: 圆的周长 $l = 2\pi r$.	$\frac{l}{r}$ 的值与半径长无关, 而只与 α 的大小有关, 这就启发我们用圆的半径作单位去量弧, 进而定义 1 rad 的角.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	$360^{\circ}=2\pi\text{ rad},$ 平角$=180^{\circ}=\pi\text{ rad},$ 即 $180^{\circ}=\pi\text{ rad}.$ 由此得出 $1^{\circ}=\frac{\pi}{180}\text{ rad}\approx 0.017\ 45\text{ rad},$ $1\text{ rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57.30^{\circ}$ $=57^{\circ}18'.$ 设一个角的弧度数为 α，角度为 n°，则 $\alpha=\frac{n\pi}{180}$ 或者 $n=\alpha\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)$ 特殊角的弧度数与角度数的互化，见教材. 例 1 把 $67^{\circ}30'$ 化成弧度. 解 $67^{\circ}30'=\left(\frac{135}{2}\right)^{\circ},$ $67^{\circ}30'=\frac{\pi}{180}\text{ rad}\times\frac{135}{2}$ $=\frac{3\pi}{8}\text{ rad}.$ 练习 1 本节练习 A 组第 2 题. 例 2 把 $\frac{3\pi}{5}\text{ rad}$ 化成度. 解 $\frac{3\pi}{5}\text{ rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\times\frac{3\pi}{5}$ $=108^{\circ}.$ 练习 2 本节练习 A 组第 3~4 题.	周角 $=360^{\circ}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi\text{ rad},$ 即 $360^{\circ}=2\pi\text{ rad}.$ 教师提问：180° 等于多少弧度？90°，60°，45°，30° 等于多少弧度？ 教师引导学生得出角度制与弧度制的换算公式. 例 1 和例 2 可由学生自己完成，教师适当指导即可.	帮助学生熟记特殊角的弧度数. 熟练掌握角的弧度数与角度数的互化.

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	例 3 使用函数型计算器，把下列度数化为弧度数或把弧度数化为度数（结果精确到小数点后 2 位数）： (1) 67°，-86°； (2) 1.2 rad，-3.5 rad. 解 略. 这种用“弧度”作单位来度量角的制度称为弧度制. 无论是用角度制还是弧度制，都能在角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立一一对应的关系. 3. 弧长公式 由弧度的定义，我们知道弧长 l 与半径 r 的比值等于所对圆心角 α 的弧度数（正值），即 $\frac{l}{r} = \alpha \text{ 或 } l = \alpha r.$ 其中 $l = \alpha r$ 是弧度制下的弧长计算公式. 例 4 如图 2 所示，$\widehat{AB}$ 所对的圆心角为 60°，半径为 5 cm，求 $\widehat{AB}$ 的长 l（精确到 0.1 cm）. 	教师指出：由于角有正负，我们规定：正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为 0. 教师给出弧度制的定义. 教师引导学生利用弧长公式求解例 4.	对任意角的弧度数给出明确的规定. 为三角函数的引入做铺垫. 巩固弧长公式的应用.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	解 因为 $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, 所以 $l = \alpha r = \frac{\pi}{3} \times 5 \approx 5.2$. 即 $\widehat{AB}$ 的长约为 5.2 cm. 例 5 利用弧度制证明扇形的面积公式 $S = \frac{1}{2} \alpha R^2$ 和 $S = \frac{1}{2} lR$, 其中 R 是扇形的半径, α ($0 < \alpha < 2\pi$) 为圆心角, l 是扇形的弧长, S 是扇形的面积. 证明 因为半径为 R, 圆心角为 n° 的扇形的弧长公式和面积公式分别是 $l = \frac{n\pi R}{180}, S = \frac{n\pi R^2}{360},$ 将 n° 转换为弧度, 得 $\alpha = \frac{n\pi}{180}$, 于是 $S = \frac{1}{2} \alpha R^2$. 将 $l = \alpha R$ 代入上式, 即得 $S = \frac{1}{2} lR$.	教师引导学生推理得出弧度制下扇形的面积公式.	以例题的形式, 引出弧度制下扇形的面积公式.
小结	本节知识点: 1. 弧度制的定义. 2. 角度制与弧度制的换算. 3. 弧长公式和扇形面积公式.	教师请学生自己总结本节主要内容.	归纳整理知识点, 明确弧度制的意义.
作业	必做题: 本节练习 A 组第 6 题, 本节练习 B 组第 1~3 题. 选做题: 本节练习 B 组第 4 题.	学生课后完成.	分层设置作业, 为不同基础的学生提供选择空间.