

5.2.2 同角三角函数的基本关系式

【教学目标】

1. 理解同角三角函数的基本关系式，会运用公式求值、化简、证明.
2. 提高用方程（组）解决问题的能力.
3. 体会知识间的联系性与整体性，发展数学运算、逻辑推理的核心素养.

【教学重点】

同角三角函数的基本关系式的推导及应用（求值、化简、恒等式的证明）.

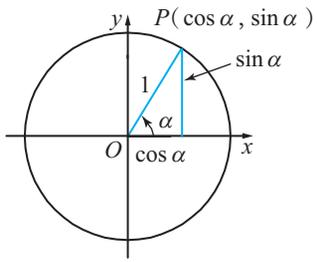
【教学难点】

灵活应用同角三角函数的基本关系式.

【教学方法】

本节课主要采用讲练结合的教学方法. 在教学过程中，要注意引导学生理解每个公式，懂得公式的来龙去脉，并能灵活运用. 课堂中，充分发挥学生的主体作用，让学生自主探究并解决问题，提高学生用方程（组）解决问题的能力.

【教学过程】

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	<p>复习三角函数的定义、单位圆和三角函数线、勾股定理.</p>  <p>图 1</p>	<p>结合图 1，教师带领学生回顾与本节课相关的知识点.</p>	<p>为推出</p> $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$ $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ <p>这两个基本关系式做准备.</p>
新课	<p>在单位圆中，由三角函数的定义和勾股定理，可得同角三角函数的基本关系式：</p>	<p>教师引导学生根据图 1，证明同角三角函数的基本关系式.</p>	

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$ <p>同角三角函数的基本关系式的应用主要包括三个方面.</p> <p>一、求值</p> <p>例 1 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 且 α 是第二象限角, 求 α 的余弦和正切值.</p> <p>解 由 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 得</p> $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$ <p>因为 α 是第二象限角, $\cos \alpha < 0$,</p> <p>所以 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$,</p> $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}.$	<p>教师介绍 $\sin^2 \alpha$, $\cos^2 \alpha$ 的读法、写法, 并让学生验证 30°, 45°, 60° 的正弦、余弦、正切值是否满足两个关系式.</p> <p>教师引导学生明确: “同角”的概念与角的表达形式无关, 如 $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ 也成立.</p> <p>教师指出: 当我们知道一个角的某一三角函数数值时, 利用这两个关系式和三角函数的定义, 就可求出这个角的另外两个三角函数值. 此外, 还可用它们化简三角函数式和证明三角恒等式.</p> <p>教师鼓励学生自己解例 1, 并在开方时强调符号问题.</p> <p>教师布置练习: 本节练习 A 组第 1 (2) (3) 题.</p> <p>教师总结: 已知正弦 (或余弦) $\xrightarrow{\text{根据平方关系}}$ 求余弦 (或正弦) $\xrightarrow{\text{根据商数关系}}$ 求正切.</p>	<p>初步认识和应用同角三角函数的两个基本关系式.</p> <p>“同角”可以从两个方面理解: 一是“角相同”; 二是“任意一个角”.</p> <p>指出同角三角函数基本关系式的主要应用.</p> <p>巩固同角三角函数的两个基本关系式的应用.</p>

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>例 2 已知 $\tan \alpha = -\sqrt{5}$, 且 α 是第二象限角, 求角 α 的正弦和余弦值.</p> <p>解 由题意得</p> $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \textcircled{1}$ $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\sqrt{5}. \quad \textcircled{2}$ <p>由 $\textcircled{2}$ 得 $\sin \alpha = -\sqrt{5} \cos \alpha$, 代入 $\textcircled{1}$ 式得</p> $\cos^2 \alpha = \frac{1}{6}.$ <p>因为 α 是第二象限角, 所以</p> $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{6},$ <p>代入 $\textcircled{2}$ 式得</p> $\begin{aligned} \sin \alpha &= -\sqrt{5} \cos \alpha \\ &= -\sqrt{5} \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{30}}{6}. \end{aligned}$ <p>二、化简</p> <p>例 3 化简: $\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\tan \theta - 1}$.</p> <p>解 原式 = $\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1}$</p> $= \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta}} = \cos \theta.$	<p>教师引导学生通过解方程组完成例 2.</p> <p>教师布置练习: 本节练习 A 组第 1 (4) 题.</p> <p>教师总结: 知正切 $\xrightarrow{\text{解方程组}}$ 求余弦 (或正弦).</p> <p>教师强调以下两点:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 注意同角三角函数基本关系式的变形应用. 2. 已知 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ 中的任意一个, 可以用方程 (组) 求出其余的两个. <p>教师指出化简例 3 时, 把正切函数化为正弦函数与余弦函数的商.</p> <p>教师布置练习: 本节练习 A 组第 2 题、练习 B 组第 1 题.</p>	<p>结合同角三角函数的基本关系式, 利用方程组求解问题.</p> <p>及时强调应用同角三角函数基本关系式求值的思路, 为下面运用公式化简和证明积累经验.</p>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>三、证明</p> <p>例 4 求证：</p> <p>(1) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2\sin^2 \alpha - 1$；</p> <p>(2) $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha$；</p> <p>(3) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$.</p> <p>证明 (1) 原式左边</p> $= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$ $= \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ $= \sin^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)$ $= 2\sin^2 \alpha - 1$ <p>= 右边.</p> <p>因此 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2\sin^2 \alpha - 1$.</p> <p>(2) 原式右边 $= \tan^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$</p> $= \tan^2 \alpha - \tan^2 \alpha \cos^2 \alpha$ $= \tan^2 \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cos^2 \alpha$ $= \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ <p>= 左边.</p> <p>因此 $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha$.</p> <p>(3) 证法 1: 因为</p> $\frac{\cos x}{1 - \sin x} - \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ $= \frac{\cos^2 x - (1 - \sin^2 x)}{(1 - \sin x)\cos x}$ $= \frac{\cos^2 x - \cos^2 x}{(1 - \sin x)\cos x}$ $= 0.$	<p>教师提示：证明恒等式一般从繁到简，从高次到低次，顺序上，可以从左向右，或从右向左，或从两边向中间来证明。</p> <p>可让学生自己先独立探索证明思路，再小组讨论。教师在证明思路和解题格式上给予指导。</p> <p>教师引导学生分析证法 1：用作差比较法，通过证明两式的差为 0 来证明两式相等。</p>	<p>在恒等式的证明中巩固同角三角函数的基本关系式。</p> <p>一题多解，体会同角三角函数基本关系式的灵活应用。</p>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	<p>所以 $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$.</p> <p>证法 2: 因为</p> $\text{左边} = \frac{\cos x}{1 - \sin x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x}$ $= \frac{\cos^2 x}{(1 - \sin x) \cos x};$ $\text{右边} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \cdot \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x}$ $= \frac{\cos^2 x}{(1 - \sin x) \cos x}.$ <p>所以左边 = 右边, 即原等式成立.</p>	<p>教师引导学生分析证法 2: 利用公分母将原式的左边和右边转化为同一种形式.</p> <p>教师布置练习: 本节练习 A 组第 3 题、练习 B 组第 2 题.</p>	
小结	<p>1. 同角三角函数的基本关系式:</p> $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$ $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha.$ <p>2. 求值、化简和证明题目的思路与注意事项.</p>	<p>师生共同总结.</p>	<p>帮助学生养成及时总结、反思的好习惯.</p>
作业	<p>必做题: 写出同角三角函数的基本关系式, 并写出其变形公式.</p> <p>选做题: 本节练习 B 组第 3 题.</p>	<p>学生课后完成.</p>	<p>巩固所学知识.</p>