

5.2.3 诱导公式

【教学目标】

- 1. 了解诱导公式，会求任意角的三角函数值，会证明简单的三角恒等式.
- 2. 了解对称变换的思想在数学问题中的应用.
- 3. 进一步体会数形结合的思想，提升逻辑推理的核心素养.

【教学重点】

利用诱导公式进行三角函数式的求值、化简.

【教学难点】

诱导公式①②③④的推导.

【教学方法】

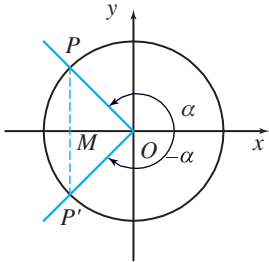
本节课主要采用启发诱导与讲练结合的教学方法，引导学生借助单位圆和三角函数线，充分利用对称的性质，推出诱导公式，然后通过例题、习题，使学生牢固掌握诱导公式的应用.

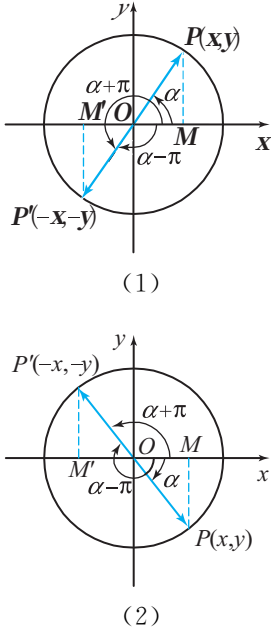
【教学过程】

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入	1. 复习三角函数的定义、单位圆与三角函数线； 2. 复习对称点的知识.	教师用课件展示三角函数的定义、单位圆与三角函数线的相关内容. 教师提问：已知任意角 α 的终边与单位	为新课做准备.

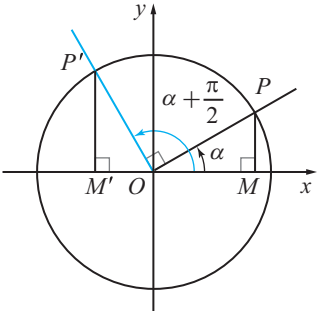
续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
导入		圆相交于点 $P(x, y)$ ，请分别写出点 P 关于 x 轴、 y 轴、原点对称的点的坐标.	
新课	1. 角 α 与 $\alpha + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 的三角函数间的关系 平面直角坐标系中，α 与 $\alpha + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) 的终边相同，由三角函数的定义，它们的三角函数值相等，于是得到公式①： $\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin \alpha,$ $\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos \alpha, \quad (k \in \mathbf{Z})$ $\tan(\alpha + k \cdot 2\pi) = \tan \alpha.$ 例 1 求下列各三角函数的值： (1) $\sin \frac{13\pi}{2}$; (2) $\cos \frac{19\pi}{3}$; (3) $\tan 405^\circ$. 解 (1) $\sin \frac{13\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 6\pi\right)$ $= \sin \frac{\pi}{2} = 1;$ (2) $\cos \frac{19\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 6\pi\right)$ $= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$ (3) $\tan 405^\circ = \tan(45^\circ + 360^\circ)$ $= \tan 45^\circ = 1.$	师生共同探讨得出公式①的结构特征：等号两边是同名三角函数，且符号都为正. 例 1 由学生独立完成求解. 教师总结公式①的作用：把任意角的三角函数转化为 $0 \sim 2\pi$ 内角的三角函数.	展示诱导公式①在求值时的应用.

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	2. 角 α 与 $-\alpha$ 的三角函数间的关系 如图 1, 设单位圆与角 α 和角 $-\alpha$ 的终边的交点分别是点 P 和点 P'. 容易看出, 点 P 与点 P' 关于 x 轴对称.  图 1 已知 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $P'(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$. 于是, 得到公式②: $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$ 例 2 求下列各三角函数值: (1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; (2) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; (3) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; (4) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$. 解 (1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$; (2) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; (3) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$; (4) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\sin \frac{7\pi}{3}$	观察图 1, 教师引导学生回答, 点 P' 与点 P 的位置关系怎样? 它们的坐标之间有什么关系? 进而推出诱导公式②. 学生独立完成例 2, 并交流解题心得. 讲完例 2 后, 教师总结诱导公式②的作用: 把任意负角的三角函数转化为正角的三角函数. 教师布置练习: 本节练习 A 组第 1 (3) (4) 题、第 2 (3) (4) 题、第 3 (4) 题.	熟练应用公式①和②求值.

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	$= -\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$ 3. 角 α 与 $\alpha \pm \pi$ 的三角函数间的关系 如图 2，角 α 与 $\alpha \pm \pi$ 的终边与单位圆分别相交于点 P 与点 P'，容易看出，点 P 与点 P' 关于原点对称，它们的对应坐标互为相反数，于是得到公式③： $\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin \alpha,$$\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos \alpha,$$\tan(\alpha \pm \pi) = \tan \alpha.$  图 2 4. 角 α 与 $\alpha + \frac{\pi}{2}$ 的三角函数间的关系 如图 3 所示，角 α 的终边与单位圆的交点为 P，角 $\alpha + \frac{\pi}{2}$ 的终边与单位圆的交点	观察图 2，教师引导学生回答，点 P' 与点 P 的位置关系怎样？它们的坐标之间有什么关系？进而推出公式③。	教师用语言叙述公式③，更利于学生理解、掌握公式③的特征。

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	为 P'，则点 P 的坐标是 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$，点 P' 的坐标是 $\left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right)$。过点 P 作 PM 垂直 x 轴于点 M，过点 P' 作 $P'M'$ 垂直 x 轴于点 M'，易证 $\triangle P'M'O \cong \triangle OMP$，由此可证明公式④： $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha,$ $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha.$  图 3 例 3 求下列各值： (1) $\cos \frac{2\pi}{3}$；(2) $\sin 150^\circ$. 解 (1) $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$； (2) $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. 公式①②③④都称为三角函数的诱导公式，利用这些公式可以把任意角的三角函数转化为锐角的三角函数。	教师引导学生证明 $\triangle P'M'O \cong \triangle OMP$，从而得到公式④。 学生独立完成，并交流解题心得。 教师指出诱导公式的作用，并引导学生体会。	熟练运用公式③求三角函数值。 渗透转化的数学思想。

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新 课	例 4 求下列各三角函数的值： (1) $\sin \frac{4\pi}{3}$; (2) $\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$; (3) $\tan\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$; (4) $\sin 930^\circ$. 解 (1) $\sin \frac{4\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)$ $= -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$ (2) $\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = \cos \frac{8\pi}{3}$ $= \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos \frac{2\pi}{3}$ $= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \pi\right)$ $= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2};$ (3) $\tan\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = -\tan \frac{10\pi}{3}$ $= -\tan\left(\frac{\pi}{3} + 3\pi\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)$ $= -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3};$ (4) $\sin 930^\circ = \sin(30^\circ + 5 \times 180^\circ)$ $= \sin(30^\circ + 180^\circ)$ $= -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$ 例 5 证明： (1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$; (2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$.	教师引导学生发现：求解例 4 的关键是找出题中各角与锐角的关系，进而将问题转化为求锐角的三角函数值问题。 学生求解，教师提问求解的过程中用到了哪些诱导公式。	综合运用诱导公式求任意角的三角函数值。 引导学生熟练、灵活地运用诱导公式。

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
新课	证明 (1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ $=\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$ $=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos \alpha;$ (2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]$ $=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin \alpha.$ 例 6 化简: $\frac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\times\sin(-\pi-\alpha)\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}.$ $\begin{aligned}& \quad (-\sin \alpha)(-\cos \alpha)(-\sin \alpha) \\& \quad \times \cos\left[5\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] \\ \text{解 原式} &= \frac{(-\cos \alpha)\sin(\pi-\alpha)[- \sin(\pi+\alpha)]}{(-\cos \alpha)\sin \alpha [-(-\sin \alpha)]\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} \\& \quad \times \sin\left[4\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right] \\&= \frac{-\sin^2 \alpha \cos \alpha \left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{(-\cos \alpha)\sin \alpha [-(-\sin \alpha)]\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} \\&= \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha}=-\tan \alpha.\end{aligned}$	学生独立完成例 5, 教师对个别学生进行指导. 针对例 6, 教师总结: 化简时, 应灵活、综合应用诱导公式. 适当地改变角的结构, 使之符合诱导公式中角的形式, 这是解决问题的关键.	灵活应用诱导公式③和④. 综合运用各组诱导公式化简较复杂的三角代数式.
	小结	求任意角的三角函数值的步骤: 任意负角的三角函数 公式② 任意正角的三角函数 公式① 0到 2π内的角的三角函数 公式③ 锐角的三角函数	师生共同总结、交流. 教师可指出诱导公式④在证明、化简中较为重要, 并且公式④揭示了正弦函数与余弦函数的关系.

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
作业	本节练习 B 组题目.	学生课后完成.	巩固所学知识.