

**为改进学习而评价**

**实现测试到评价的跃升**

**——基于数学学科核心素养的学业质量评价**

湖北省教育科学研究院 周远方

# • 交流提纲

一、研究背景

二、评价框架

三、实施策略

一、

# 研究背景

## ——缘由、思路、课题

# 一、研究背景

## 从“能力立意”到“素养导向”



《中国学生发展核心素养》提出了核心素养的总体框架和基本内涵，高考评价体系确立了高考中学科素养的考查目标，标志着中国高考正在实现从能力立意到素养导向的历史性转变。

能力立意强调知识、智力、能力和技能的考查，题目的特点是追求知识覆盖面广、全面，题目结构完整，目标指向明确，要求有一定的反应速度，素养导向不但强调知识和智力，更强调知识的迁移和后续的学习，题目的特点是不追求题目结构的完整，追求目标指向开放，要求临场思考发挥，目的在于更清晰、准确地考查学生的智力水平、思考深度、思维习惯和科学态度。

从能力立意到素养导向的转变，突出表现为考查目的从关注知识到关注人；考查目标从常规性的问题解决能到创造性的探究能力；考查情境从学科知识到真实情境化；试题条件从局部封闭到开放；试题答案从单一答案到复合因素；试题结构从碎片到整体。

素养导向的高考题注重学科观念、规律的考查，考查学生扎实的学科基础，引导他们去形成思维中的惯性观念，并且能够合理的进行转化，将这些学科知识作为素养形成和发展的基础和先决的条件。

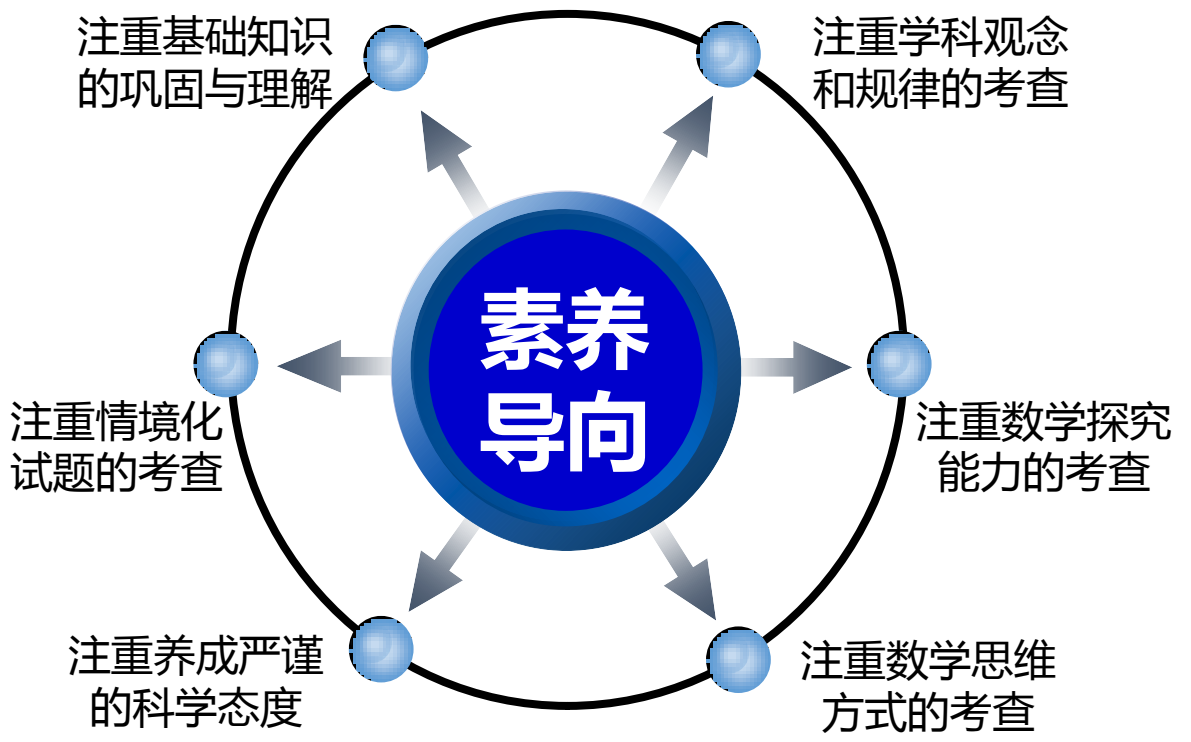
素养导向的高考题注重科学思维的考查，要求学生以严谨的科学思维、严肃的科学态度去思考每一个实际问题，科学思维是对客观的事物本质的属性以及潜在的规律和相互之间的关系的一种认知方式，这种方式必须建立在实际的事实之上去建构相应的模型，从而理解抽象化的概念，并且通过合理的推理与客观的经验来培养的思维精神，以此来形成创新性的思维方式和提出成果。

素养导向的高考题注重科学探究能力的考查，研究开发探究型、开放型试题，发挥各种类型的组合功能，拓展学生思维空间，创设新的情境，变换问题质和知识的组合方式，考查科学探究能力，提供新的信息，考查学生获取信息、加工信息的能力，从学生已有的知识结构出发，推断出新，考查学生的创新能力，形成合作创新的创新意识。

素养导向的高考题注重情境化问题的考查，情境化问题能够展现出学生学科素养的探究活动，是学科素养的载体，情境包括真实的现实生活情境与学术探究情境活动，在真实生活过程理论结合实践，特别是结合生产、生活实际设计试题，采用真实、源于生活的真实的情境，考查学生分析和解决具有实际意义的问题的能力，所以基于核心素养的高考题更加注重学生实际的解决问题能力，要求学生运用生活化的实际场景，并且依靠科学的方法、科学的态度进行推理，进而得到最终的答案，将学生的解题转变为解决问题，将做题转变为做人、做事。

素养导向的高考题有利于学生养成严谨的科学态度，任何一门课程都不仅仅只是向学生简单地传授知识，更重要的是培养他们正确的学习方式和习惯，要通过提高他们用科学的思维方式解决实际问题的能力，激发他们学习的兴趣，培养学习的主动能动性，具备社会责任感。

总之，素养导向的高考题注重基础知识的巩固与理解，注重科学素养的提升，科学思维方法的掌握，科学态度的养成，注重解决生活中的实际问题，素养导向的高考题引导中学教学尊重学生学习的主体地位，激发学生学习的主动能动性，养成学生良好的学习习惯，从而为国家培养全面而有个性的高素质建设人才。



# 一、研究背景

评价的新要求将带来考试的新变化



在命制学业水平测试与考试的试题时，关键的环节是要将课程标准中的核心素养水平表现、内容标准、学业要求、学业质量标准细化为测试的目标。

# 一、研究背景

## 基于数学核心素养的教学测评研究

### 课题研究背景——出方案，定调子



- 基于新版人教A版教参新增“评价建议与测试”的栏目，制定“基于数学学科核心素养的教学测评”编写方案，确定“以素养为本，为改进学习而评价，实现测试到评价的跃升”的评价理念，突出“教、学、评”一体化的实施策略，重在引领高中数学日常教学与评价，并，力求实现新的突破。

# 一、研究背景

## 基于数学核心素养的教学评测研究

### 课题研究背景——立项目，定框架



- 成立课题组，由周远方负责，课题组专家为章建跃、李海东、李龙才，研究成员为刘春艳、张惠英、沈捷、赵昕、薛红霞、吴明华、周远方、郭慧清、程海奎。
- 构建基于数学学科核心素养的评价框架，完成必修课程和选择性必修课程的研究和编写任务。

二、

# 评价框架 ——内涵、理念、模型



## 二、评价框架

### （一）数学学业质量评价的内涵

- **学业质量评价**：指对学生在学校课程所取得学业成就的测量和评价。具有诊断、选拔、监测、激励和管理等方面的功能，其核心价值是促进学生自主学习、改进学习和持续发展。
- **数学学业质量评价**：基于学生数学学科核心素养的达成。在数学学业质量评价中，数学学科核心素养的达成是以数学核心知识为载体、以数学思想方法为依托、以数学关键能力为特征的综合体现。

## 二、评价框架

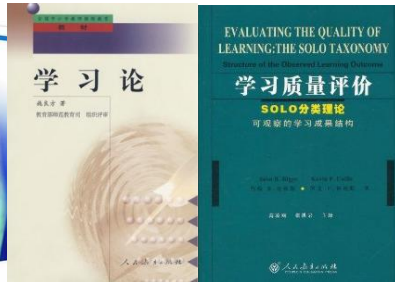
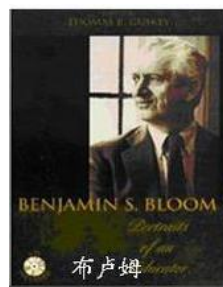
### (二) 为改进学习而评价的理念

- 为了学习的评价 是学习者和教师为了确定学生在学习 中现在在哪里 ( where ) ，应该到哪里 ( where ) ，以及如何更好地达到那里 ( how ) 而收集和解释证据的过程。
- 从关于学习的评价 ( Assessment of learning ) 到为了学习的评价 ( Assessment for learning ) ，摆脱了为评价而评价的思维定势。
- 继承了形成性评价的特点，充分发挥以评促学、以评促教的作用，达成 “教、学、评” 一体化。

# 二、评价框架

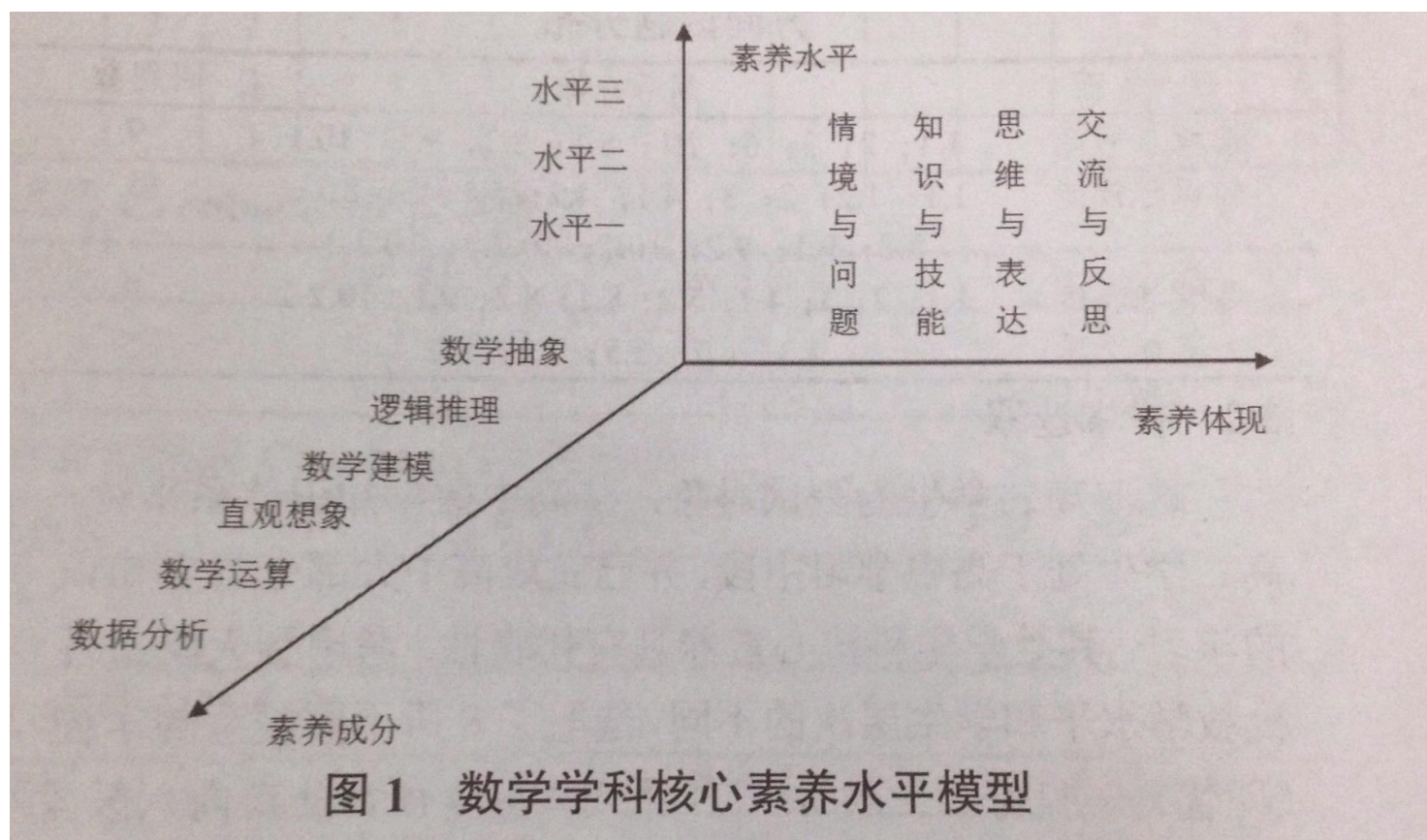
## (三) 几种常用评价模型和方法

- 布卢姆学习评价模型
- PISA素养评价模型
- SOLO分类评价模型
- 等级描述型评价法
- 基本要素型评价法
- 多重计分型评价法



## 二、评价框架

### 数学学科核心素养的水平模型



# 二、评价框架

## 数学核心素养评价的一个框架

第 24 卷第 2 期  
2017 年 4 月  
数学教育学报  
JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION  
Vol.26, No.2  
Apr. 2017

### 数学核心素养评价的一个框架

喻平

(南京师范大学 课程与教学研究所, 江苏 南京 210097)

摘要: 学生数学核心素养的生成, 源于对数学知识的学习。数学知识学习表现为 3 种形态: 知识理解、知识迁移、知识创新。知识学习的 3 种形态生成不同水平的数学核心素养。因此, 对数学核心素养的评价应基于知识学习的 3 种形态。据此对数学核心素养分为 3 种不同水平, 这种水平划分借鉴了布卢姆模型、PISA 模型的生长, 又体现了数学学习的特点, 具有理论性和可操作性双重特性。

关键词: 数学核心素养; 核心素养水平; 知识理解; 知识迁移; 知识创新  
中图分类号: G40-01 文献标识码: A 文章编号: 1004-8994 (2017) 02-0019-05

在《教育部关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见》中, 明确界定了核心素养, 即学生应具备的适应终身发展和社会发展的必备品格和关键能力。目前, 我国正在组织专家学者对核心素养标准进行研讨。数学学科核心素养作为修订课程标准的主线, 贯穿学科核心素养制订教学内容的过程, 评价标准教材编制。做这个工作应当有一些思考, 正如郑毓信先生指出的, 应当更为深入地探讨与理解“核心素养”的具体含义和现实意义, 包括它与“素质教育”的关系与区别。从实践的角度看, 不应唯“课标”所缚, 要“学会课程”, 乃至片面地提倡“去学科化”, 而是应该更加重视如何能寻这一思想落实到各个具体学科的教学之中<sup>[1]</sup>。

数学核心素养评价问题, 面临两个必须解决的问题, 一是确定学科核心素养的成分, 二是确定学科核心素养的水平。目前, 各学科对这两个问题都作了初步方案。高中数学课程标准修订组的专家提出了 8 种数学核心素养成分: 数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算、直观想象、数据分析, 对每一种素养都作了 3 个水平的划分。

现在的问题是, 提出的 6 个数学核心素养成分是否合理, 科学? 每一个核心素养的水平划分的依据又是什么? 这两个问题既有相互交叉又具有相对独立性, 因为不同核心素养的成分不同, 对它们水平划分应当采用一个统一的衡量尺度。因此, 这里通过第一个问题, 就数学核心素养的水平划分依据作一探讨。

#### 1 几种学习评价模型分析

##### 1.1 布卢姆模型

美国教育心理学家布卢姆(Bloom)的研究团队, 在 1950 年代对分类学方法研究学生学习目标, 将其分为知识、理解、应用技能 3 个领域, 每一领域的目标又由低到高依次划分成 6 个层次<sup>[2]</sup>。

从知识的目标从低到高分为 6 级: (1) 知识: 对先前学习的材料有记忆; (2) 领会: 能理解材料的意思, 有助于 3 种形式去责任; 一是解释, 即用自己的话重述与原文表达方式不同的方式表达自己的意思; 二是解释, 即对一

信息加以说明或描述; 三是推断, 即估计将来的趋势;

(3) 运用: 能将习得的材料应用于新的具体情境; (4) 分析: 能将整体材料分成它的构成成分并理解组织结构; (5) 综合: 能将材料组成新整体, 产生新的模式或结构; (6) 评价: 对材料作价值判断的能力。

之后, 克拉斯沃尔(Krathwohl)完成了情感领域的目标分类, 依据价值内化(由外在的学习转化为个人内在的价值观、态度、价值等心理特征)的程度, 从低到高分为 5 级: (1) 接受(注意): 学生注意特殊的现象或刺激, 包括从意识到某一事物存在的简单注意到选择性注意;

(2) 反应: 学生主动参与, 包括默认、愿意反应及反应的满足; (3) 评价: 学生有选择地对现象、现象行为与一定的价值标准相联系; (4) 组织: 将许多不同的价值标准组合在一起, 克服它们之间的矛盾、冲突, 并开始建立内在一致的价值观体系; (5) 价值与价值体系的个性化: 个人具有长期控制自己的行为以追求其个性化的价值体系。

布卢姆的学习评价模型具有一些明显的特点, 其一, 将学习评价分为 3 个领域, 3 个领域相对独立, 有各自的水平划分标准, 值得注意的, 布卢姆的学习评价理论, 并不只是考虑学生掌握知识的情况, 在比较高的水平阶段, 考察的本身, 是知识学习之目的能力, 其二, 对于知识领域的学习, 基本上是对知识学习不同结果的评价, 即强调知识学习开展的, 与中国目前课程标准中的“知识与技能”, 过程与方法”相对应, 只是把这两个要素作为认知领域中不同的水平来谈, 对于情感领域的学习, 是对其整体态度开展的, 与课程标准提出的三维目标中的“情感、态度与价值观”相对应, 相比之下, 布卢姆对评价目标有清晰的划分, 两个目标领域内衔接, 具有实践层面的可操作性, 而中国课程标准提出三维目标, 将 3 个目标一列开来关系却又模糊在一起, 在实际中难以操作和实现的。

当然, 布卢姆模型也有一些问题, 目标的水平划分分得过细, 难免会有水平交叉、重叠关系。同时, 这个模型是描述性的, 即可用于指导教学, 但教学上, 每个学科都有自己的特殊性, 一种统一的模式以试图涵盖所有的



## 数学核心素养的一个评价框架

收稿日期: 2016-12-14  
基金项目: 江苏省社科基金项目——中小学教师数学核心素养体系建构与实施研究(15SYD001); 江苏省教育厅重大项目——江苏省教育科学规划课题(2015-2017)的阶段性成果  
作者简介: 喻平 (1956—), 男, 重庆人, 教授, 博士, 博士生导师, 主要从事数学课程与教学研究。

## 二、评价框架

### 数学核心素养评价的一个框架

数学学科	知识理解	知识迁移	知识创新
核心素养	水平一	水平二	水平三
数学抽象			
逻辑推理			
数学建模			
数学运算			
直观想象			
数据分析			

## 二、评价框架

### 数据处理能力的分层评价方法

数据处理能力	评价方法		
	层次一	层次二	层次三
收集查找数据能力	会从给定的数据中查找相关数据。	能从收集的众多数据中利用一定的方式查找相关数据。	能确定从何处、以何种方式可以查找相关数据并能加以实施。
整理分析数据能力	会从大量数据中比较、选择所需数据。	能解释数据蕴含的信息，确定选择的数据是否准确、完整。	能从选择的数据中判断数据是否有价值和哪些有利用价值。
抽取运用数据能力	会直接应用数据解决给定的实际问题。	能用文字、图表和公式等对数据进行分类、比较和加工，并解决实际问题。	能用数据呈现的规律，制定数据应用的方案，并解决相关实际问题。

## 二、评价框架

### 能否构建一个三维立体评价框架

评价内容	数学核心素养的三维表现水平		
	A水平：了解	B水平：理解	C水平：掌握
核心知识			
思想方法			
关键能力			



## 二、评价框架

### 体现一种评价机制：两依据一理念

#### ✿一个评价理念：明确评价定位

以素养为本，为改进学习而评价，实现测试到评价的跃升。

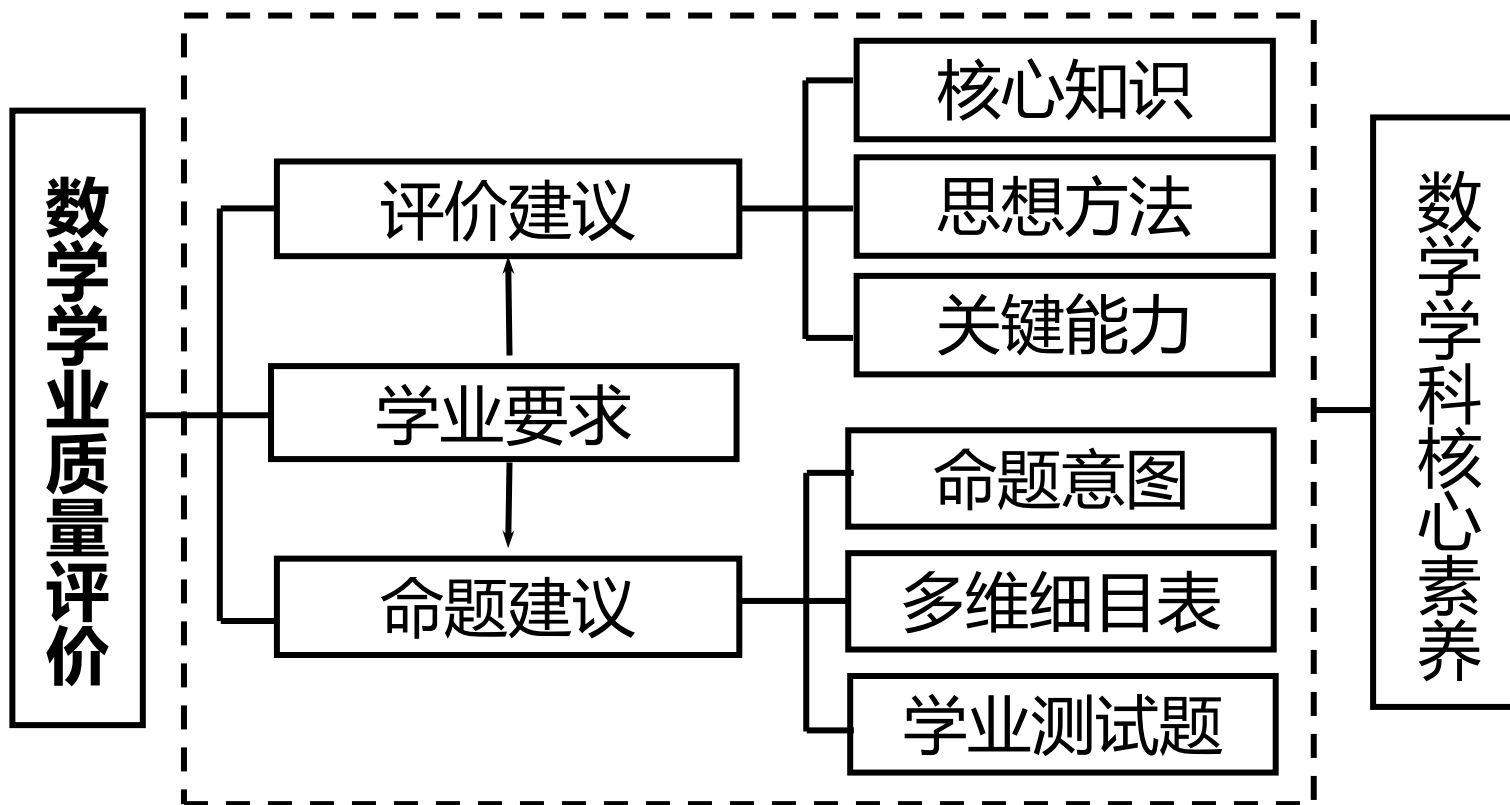
#### ✿两个基本依据：明确评价根据

以《数学课程标准2017版》中的学业要求、学业质量标准（以水平一为主，兼顾水平二）、教学与评价建议为评价依据；

以《普通高中教科书 数学》（A版）教材为基本依据，以教师教学用书为载体。

## 二、评价框架

### 构建一个评价框架：一体三层三维



基于数学学科核心素养的学业质量评价框架

## 二、评价框架

构建一个评价框架：一体三层三维

评价建议

- 三个维度
- 分层解析

学业要求

命题建议

- 原则路径
- 体例要求

一主两翼  
三位一体

评价建议

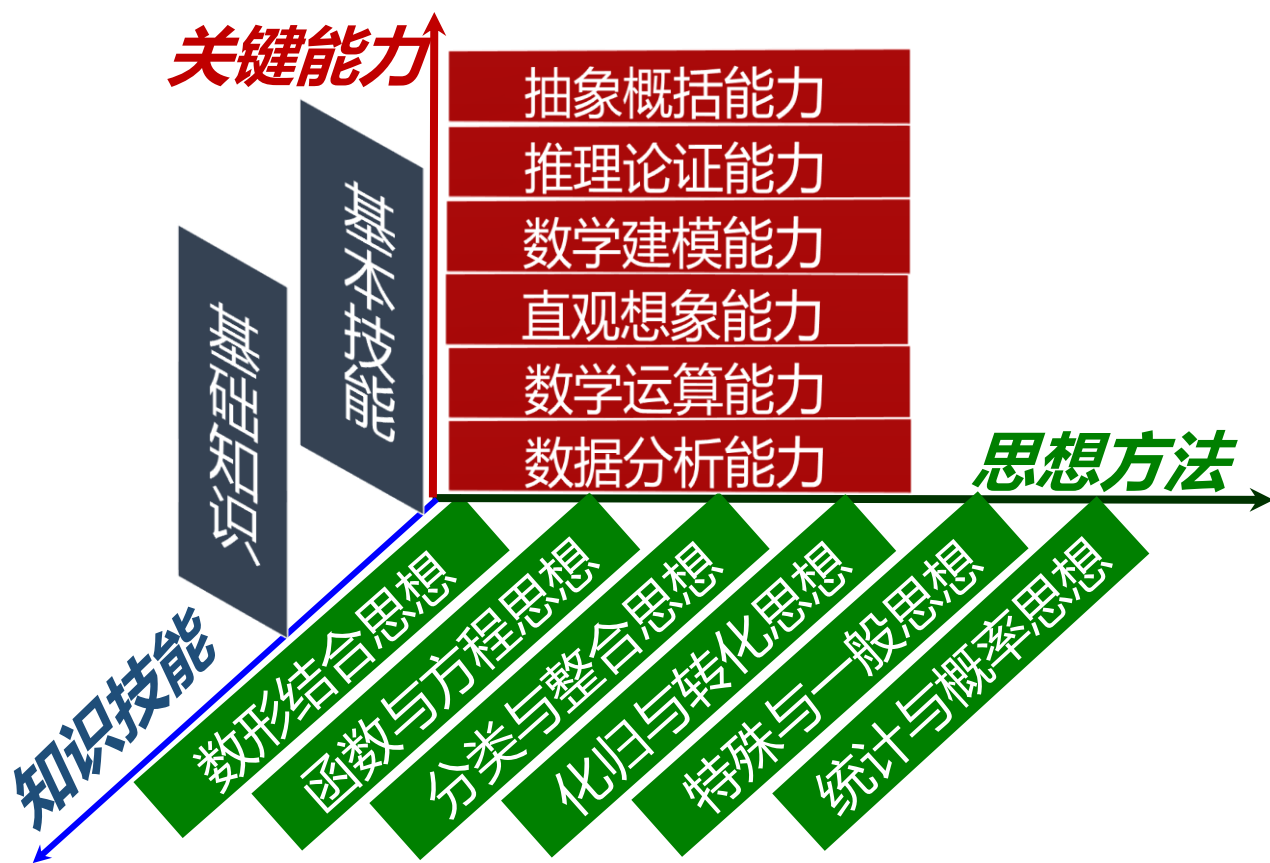
学业要求

- 抽出内容
- 理顺关系

命题建议

## 二、评价框架

构建一个评价框架：一体三层三维



三、

# 实施策略

## ——案例、操作、举措

# 三、实施策略

## (一) 学业要求：梳理课标要求

能够结合具体实例，理解通项公式对于数列的重要性，知道通项公式是这类函数的解析表达式；

通过等差数列和等比数列的研究，感悟数列是可以用来说明现实世界中一类具有递推规律事物的数学模型，掌握通项公式与前 $n$ 项和公式的关系；

能运用数列解决简单的实际问题；

能够在本章的学习中，重点提升逻辑推理、数学运算和数学建模素养。

以“数列为例”——抽出学业要求，理顺逻辑关系

# (二) 评价建议

## (二) 评价建议：明确评价层次

评价层次	具体要求	行为动词
了解	对所列知识有初步的感性认识，知道这一知识内容是什么，会按照一定的程序和步骤操作，并会模仿地利用所学知识解决简单问题。	感受，知道、识别，模仿，会求、会解等
理解	对所列知识有较深刻的理性认识，懂得知识间的逻辑关系，能准确地用数学语言描述、说明和表达，并能综合地应用所学知识解决问题。	描述，说明，表达，推测、想象，比较等
掌握	对所列知识有较为系统的理性认识，能正确把握知识之间的内在联系和本质规律，能将知识、思想和方法进行迁移，并能灵活地运用所学知识解决问题。	导出、分析，推导、证明，研究、讨论等

# 三、实施策略

## 核心知识评价要求的细化解析

### 操作策略之一：分层细化解析

- 将必修课程内容的学业要求划分为99个核心知识点，按照“了解”“理解”“掌握”确定了每个知识点的评价层次，并细化解析了这些知识点“了解”“理解”“掌握”的具体含义，以利于评价对标落实。



# 一是如何细化核心知识评价要求

## 第一步：细化列表

主题	知识单元	核心知识	评价要求			个数
			了解	理解	掌握	
函数	数列 概念	数列的概念	√			3
		数列的表示方法（列表、图象、通项公式）	√			
		数列与函数的关系	√			
	数列 等差 数列	等差数列的概念			√	6
		等差数列的通项公式			√	
		等差数列前 $n$ 项和公式			√	
		等差数列的通项公式与前 $n$ 项和公式的关系			√	
		等差数列的简单应用			√	
		等差数列与一次函数的关系	√			
	数列 等比 数列	等比数列的概念			√	6
		等比数列的通项公式			√	
		等比数列前 $n$ 项和公式			√	
		等比数列的通项公式与前 $n$ 项和公式的关系			√	
		等比数列的简单应用			√	
		等比数列与指数函数的关系	√			
总计			5	6	4	15

# 一是如何细化核心知识评价要求

## 第二步：细化解析

为简略起见，以下分别列举了解、理解和掌握各一个层次进行具体细化如下：

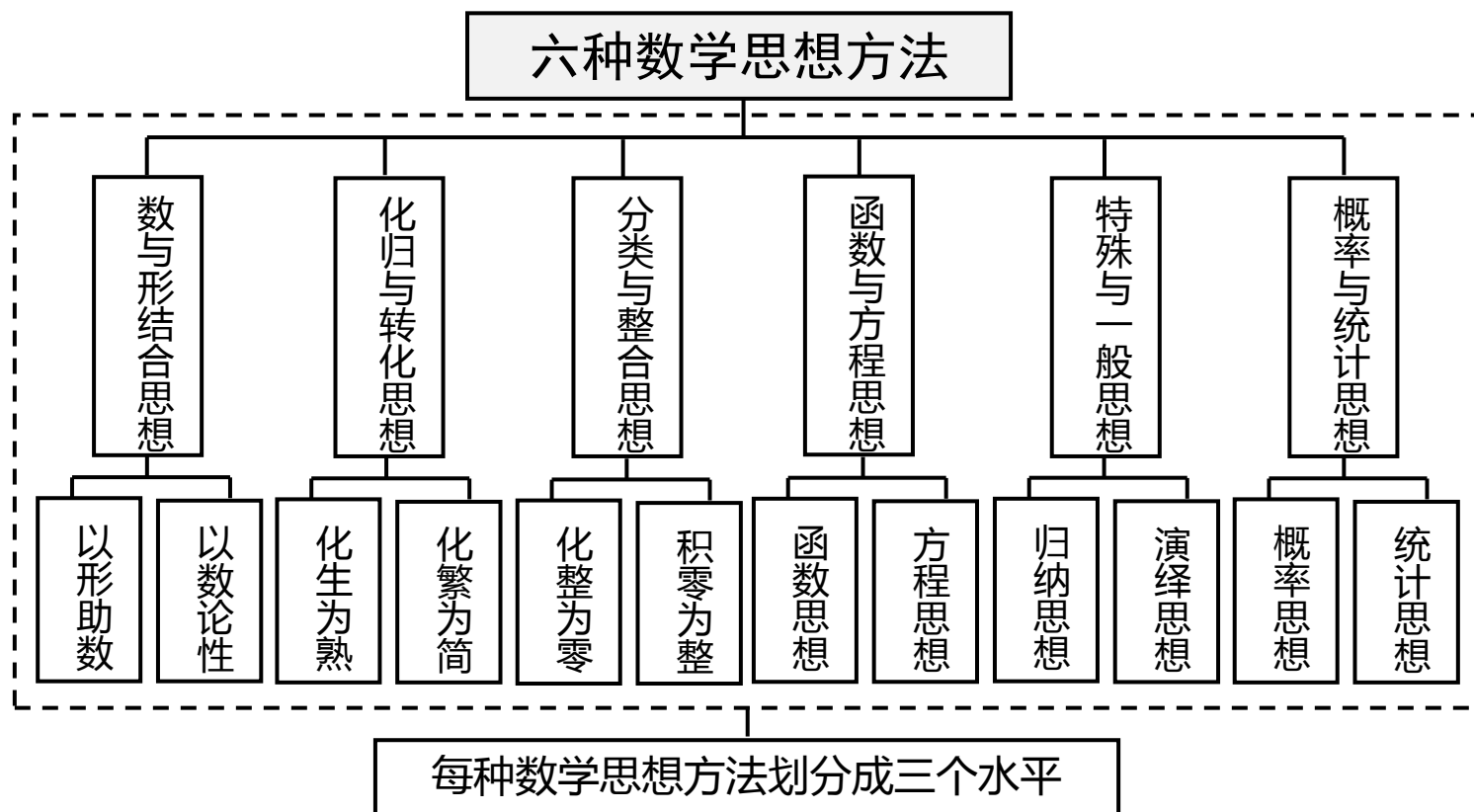
**(1) 了解数列的概念：**知道什么是数列，能说出数列的项、首项、通项、前  $n$  项和以及数列的一般形式，能对数列进行简单分类。

**(2) 理解等差数列、等比数列的通项公式：**能根据定义归纳出等差数列、等比数列的通项公式；能说出等差数列、等比数列的通项公式的特征，能利用基本量的思想方法正用、逆用和变用通项公式，并能得出等差数列、等比数列的一些基本性质，会利用通项公式解决一些简单问题。

**(3) 掌握等差数列、等比数列的前  $n$  项和公式：**能推导等差数列、等比数列的前  $n$  项和公式，能说出倒序相加、错位相减这两种求和方法的特点、适用条件以及操作步骤；能说明等差数列、等比数列的前  $n$  项和公式的特征，能灵活运用求和公式解决一些简单问题。

# 二是如何细化思想方法评价要求

## 第一步：构建思想方法的结构框架

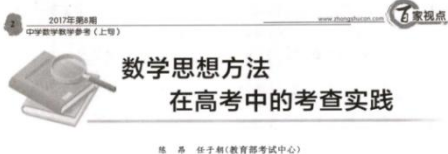


数学思想方法的结构框架图

# 二是如何细化思想方法评价要求

## 第二步：研究思想方法的考查要求

### 数学思想方法



#### 1 引言

数学思想方法是处理数学问题的指导思想和基本策略,是数学的灵魂<sup>[1]</sup>。随着20世纪80年代你刊治数教育首先在大学数学系开设“数学方法论”课程以来,关于数学思想方法的研究不断深入。目前,数学思想方法作为数学教育的重要内容,已逐渐引起人们的关注,这与教育越来越重视学生的能力培养与素质提高有着密切的关系。《普通高中数学课程标准(实验)》明确指出“数学教育在发展和完善人的教育活动中,在形成人们认识世界的态度和思想方法方面,在推动社会进步和发展的进程中起着重要作用。”<sup>[2]</sup>《普通高中学校招生全国统一考试大纲的说明》中也对数学思想方法提出了考核目标要求<sup>[3]</sup>。

高考是衔接基础教育与高等教育的关键,是选拔高校选拔人才的主要途径,高考中对数学思想方法的考查至关重要。数学思想与方法是数学知识的精髓,是形成良好认知结构的纽带,也是知识转化为能力的桥梁,是培养学生数学观念,形成优良思维品质的关键<sup>[4]</sup>。数学思想方法的考查是数学知识在更高层次上的抽象和概括,蕴含在数学知识发生、发展和应用的过程中,能够迁移并广泛应用于相关学科和生活中。因此,对数学思想方法的考查必然要与数学知识的考查相结合进行。通过数学知识的应用,考查学生对数学思想方法的理解和掌握程度。高考对数学思想方法的考查注重从学科整体意义和思想价值的高度立意,有明确的考查目的,加强针对性,注重通性通法,淡化特殊技巧,力图有效地检测考生对数学知识中所蕴含的数学思想方法的掌握程度。

#### 2 高考中的考查实践

数学学科高考以数学基础知识、基本能力、基本思想方法为考查重点,注重对数学通性通法的考查。

高考中考查的数学思想方法包括函数与方程、数形结合、分类与整合、化归与转化、特殊与一般、统计与概率、高考数学学科对思想方法的考查体现综合性和应用性,即一道试题往往考查多种思想方法,同时利用多种题型综合考查。一般说来,数学学科在高考选择题、填空题和解答题中分不同层次考查数学思想方法。选择题和填空题的情境一般都比较简单,涉及的知识内容不多,对数学思想方法的考查比较直接,主要考查对数学思想方法的理解;而在解答题中,情境则较为复杂,综合多项具体知识,在更深层次上突出考查数学思想方法的掌握和应用。

2.1 函数与方程思想  
函数与方程思想是历年高考考查的重点内容之一。函数与方程有着密切的联系,函数与方程的思想是用运动和变化的观点,分析研究数学中的数量关系,建立函数关系,然后通过研究方程去分析、转化问题,使问题获得解决。

例1 (2017年高考数学全国Ⅱ理科第14题)  
函数  $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x - \frac{3}{4}$  ( $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ) 的最大值是\_\_\_\_\_。

试题以正弦函数、余弦函数为基本函数,构造一个新函数,考查了函数与方程的思想。问题设计为求新函数的最大值,函数形式简单,考生只要熟悉正弦函数与余弦函数间的转换关系,无复杂命题思维,即可将所给函数适当变形求解问题的解。

例2 (2017年高考数学全国Ⅲ理科第21题)  
已知函数  $f(x) = \ln x + x^2 + (2a+1)x$ 。  
(I)讨论  $f(x)$  的单调性;

(II)当  $a < 0$  时,证明  $f(x) < -\frac{3}{4a} - 2$ 。

试题以基本初等函数为出发点,考查对导函数的求导法则,导数与函数单调性之间的关系,以及利用导数求函数的极值和最大值的方法。试题第(1)问考

### 函数与方程

函数与方程有着密切的联系,函数与方程的思想是要用运动和变化的观点,分析研究数学中的数量关系,建立函数关系,然后通过研究方程去分析转化问题,使问题获得解决。

### 数形结合

数形结合的思想就是把问题的数量关系和空间形式结合起来,通过“以形助数,以数辅形”使复杂问题简单化、抽象问题具体化,有助于把握数学问题的本质,有利于达到优化解题的目的。

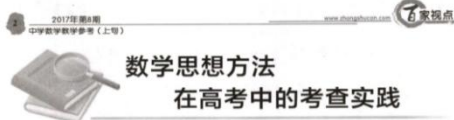
### 分类与整合

分类与整合思想在数学思想方法中占据重要地位,当问题所给的对象不能进行统一研究时,就需要对研究对象按照某个标准分类,然后对每一类分别进行研究,最后综合各类讨论的结论。

# 二是如何细化思想方法评价要求

## 第二步：研究思想方法的考查要求

### 数学思想方法



陈基 任子群(教育部考试中心)

#### 1 引言

数学思想方法是处理数学问题的指导思想和基本策略,是数学的灵魂<sup>[1]</sup>。随着20世纪40年代穆利尔的教授首先在人类数学系开设“数学方法论”课程以来,关于数学思想方法的研究不断深入。目前,数学思想方法作为数学教育的重要内容,已逐渐引起人们的关注,这与教育越来越重视学生的能力培养与家庭提高有着密切的关系。《普通高中数学课程标准(实验)》明确指出“数学教育在发展和完善人的教育活动中,在成人认识世界的态度和思想方法方面,在促进社会进步和发展的进程中起着重要作用。”<sup>[2]</sup>《普通高中学校招生全国统一考试大纲的说明》中也对数学思想方法提出了考核目标要求<sup>[3]</sup>。

高考是衔接基础教育和高等教育的重要桥梁,是我国高校选拔人才的主要途径,高考中对数学思想方法的考查至关重要。数学思想与方法是数学知识的精髓,是形成良好认知结构的纽带,也是知识转化为能力的桥梁,是培养学生数学观念、形成优良品质的重要“载体”。数学思想方法的考查是数学知识在高层次上的抽象和概括,蕴含在数学知识发生、发展和应用的过程中,能够迁移并广泛应用于相关学科和生活中。因此,对数学思想方法的考查必然要与数学知识的考查相结合。通过数学知识的应用,考查学生对数学思想方法理解和掌握的程度。高考对数学思想方法的考查注重从学科整体价值和思想价值的高度立意,用准确的考查目的,加强针对性,注重考查通法、转化特殊技巧,力图有效检测考生对数学知识中所蕴含的数学思想方法的掌握程度。

#### 2 高考中的考查实践

数学学科高考以数学基础知识、基本能力、基本思想方法为考查重点,注重对数学通性通法的考查。

高中考查的数学思想方法包括函数与方程、数形结合、分类与整合、化归与转化、特殊与一般、统计与概率。高中数学学科对思想方法的考查体现综合性和应用性,即一道试题往往考查多种思想方法,同时利用多种题型综合考查。一般来说,数学学科在高考选择、填空和解答题中分不同层次考查数学思想方法,选择题和填空题的情境一般都为简单,涉及的知识内容不多,对数学思想方法的考查比较直接,主要考查对数学思想方法的理解,而在解答题中,情境则较为复杂,综合多项具体知识,在更深层次上突出考查数学思想方法的数量和应用。

#### 2.1 函数与方程思想

函数与方程思想是历年高考的重点内容之一。函数与方程有着密切的联系,函数与方程的思想是运用运动和变化的观点,分析研究数学中的数量关系,建立函数关系,然后通过研究方程去分析、转化问题,使问题获得解决。

例1 (2017年高考数学全国卷I理科第14题)函数  $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x - \frac{3}{4} (x \in [0, \frac{\pi}{2}])$  的最大值是\_\_\_\_\_。

试题以正弦函数、余弦函数为基本函数,构造一个新函数,考查了函数与方程的思想。问题设计为求新函数的最大值,函数形式简单,考生只要熟悉正弦函数与余弦函数间的转换关系,无须复杂思维,即可将所给函数适当变形求得问题的解。

例2 (2017年高考数学全国卷I文科第21题)已知函数  $f(x) = \ln x - ax^2 + (2a+1)x$ 。

(1)讨论  $f(x)$  的单调性;

(2)当  $a < 0$  时,证明  $f(x) < -\frac{1}{2a} - 2$ 。

试题以基本初等函数为出发点,考查初等函数的求导法则,函数与函数单调性之间的关系,以及利用导数求函数的极值和最大值的方法。试题第(1)问考

### 化归与转化

化归与转化思想是在研究和解决数学问题时采用某种方式,借助某些数学知识,将问题进行等价转化,使抽象问题具体化,复杂问题简单化、未知问题已知化等,进而达到解决问题的数学思想。

### 特殊与一般

特殊与一般思想就是通过对问题的特殊情形(如特殊函数、特殊数列、特殊点、特殊位置、特殊值、特殊方程等)的解决,寻求一般的、抽象的、运动变化的、不确定的等问题的解决思路和方法的数学思想。

### 统计与概率

统计与概率思想包含统计思想与概率思想两部分。统计思想是指利用统计数据,建立统计模型,分析统计数据,作出合理判断,得到统计结论;概率思想是通过观察随机现象发现必然,研究隐藏在随机现象背后的统计规律,进而理解随机现象。

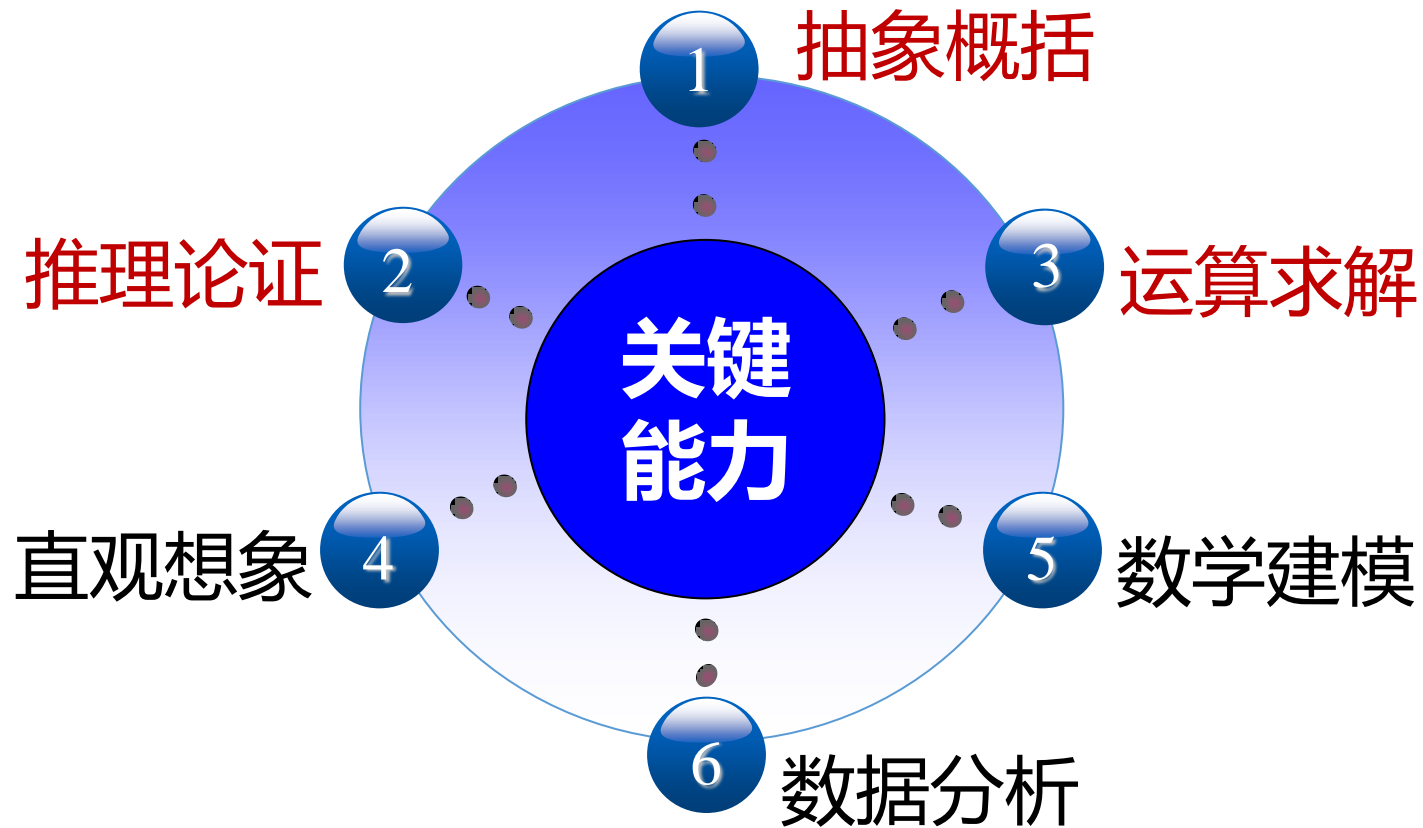
# 二是如何细化思想方法评价要求

## 第三步：将考查要求转化为评价要求

思想方法	评价要求
函数与方程	能根据数列与函数的关系将判断数列的单调性、求数列的通项、前 $n$ 项和的最大（小）值等数列问题转化为函数问题并能运用基本量的思想，建立关于首项、公差（公比）等基本量的方程或方程组，将所研究的问题归结为求基本量的问题。
特殊与一般	能由一些具体事例归纳出等差（等比）数列概念，并能由等差（等比）数列的定义运用不完全归纳法推导等差（等比）数列的通项公式。能根据已知数列的前几项归纳出该数列的通项公式，并体会“归纳—猜想—验证”在数学发现中的重要作用。
化归与转化	能通过构造辅助数列将非等差（等比）数列转化为等差（等比）数列，并能对一些非等差（等比）数列的求和中，通过倒序相加、错项相减、分组等方法将其转化为等差（等比）数列的前 $n$ 项和问题。

# 三是如何细化关键能力评价要求

## 第一步：理清能力结构的调整变化

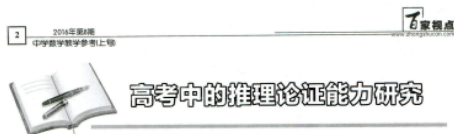


数学关键能力的界定及评价要求

# 三是如何细化关键能力评价要求

## 第二步：研究关键能力的考查要求

### 数学关键能力



作者：徐学敏(教育部考试中心)

2014年9月颁布的《国务院关于加强考试招生制度改革实施意见》(以下简称《意见》),是深化教育领域综合改革的重要指导纲领。实施意见明确了未来高考着重考查考生独立思考 and 运用所学知识分析问题、解决问题的能力。对于数学学科而言,推理论证能力是数学学科高考考查的能力,又是利用数学知识、思想、方法去分析问题、解决问题的关键能力。

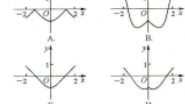
高考数学学科命题始终秉持“能力立意”的命题思想。在“考试大纲”中,推理论证能力是指根据已知的事实和已获得的正确数学命题,论证某一数学命题真实性的思维能力。解题包括合情推理和演绎推理,论证方法既包含按形式划分的演绎法和归纳法,也包含按思考方法划分的直接法和间接法法。一般运用合情推理进行猜想,再运用演绎推理进行证明<sup>[1]</sup>。根据定义,推理论证能力包含推理能力和论证方法。数学推理是指人们在数学概念系统作用下,由若干数学条件,结合一定的数学知识、方法,对数学对象形成某种判断的思维操作过程<sup>[2]</sup>。论证方法是人们运用数学思想方法进行证明或反驳所使用的策略。在对推理论证能力考查时,根据其内涵,可以从多个方面进行考查。

#### 1 利用数学图形考查

试题的呈现方式是考生可以获得的条件,也是考生进行推理的基础。数学图形是试题呈现方式的一种,这种呈现方式提供给考生的信息是隐形的,需要考生去挖掘、识别,获取信息,进行推理。在命题实践中,一般是直接给出具体图形,要求考生进行推理论证,也可以给出隐形的条件和描述,让考生自主画出图形,解决问题。

例1 (2016年高考数学全国卷I理科第7题)

函数  $y=2x^2-e^x$  在  $[-2,2]$  的图像大致为( )。



本题选取一个偶函数,要求考生推导出其在区间中的大致图像。四个选项中的图像是明确的,考生可以利用排除法进行推理,也可以对函数解析式进行分析,通过推理将其转化为图形语言,以此考查考生灵活运用所学知识、分析函数图像性质的能力。

根据函数表达式可知  $y=2x^2-e^x$  为偶函数,因此只需考虑函数当  $x \in [0, 2]$  时的图像,此时  $y=2x^2-e^x$ 。而当  $x=2$  时,  $y=8-e \in (0, 1)$ 。由此可知选项 A、B 不符合要求。再分析  $y=4x-e^x, x \in [0, 2]$ , 可知函数  $y=4x-e^x$  在  $[0, +\infty)$  上存在且有 2 个零点。当  $x=0$  时,  $y=4x-e^x=-1 < 0$ ; 当  $x=2$  时,  $y=8-e^2 \approx 0.41 > 0$ ; 当  $x=4$  时,  $y=2x^2-e^x < 0$ ; 故  $0 < 4x < 2x^2$  在  $(0, 2)$  内存在唯一零点  $x_0$ 。因此,当  $0 < x < x_0$  时,  $y^2=4x < 2x^2, y=2x^2-e^x$  单调递减; 当  $x_0 < x < 2$  时,  $y^2=4x > 2x^2, y=2x^2-e^x$  单调递增。由此可知选项 C 不符合要求,选项 D 为正确答案。

例2 (2016年高考数学全国卷I理科第12题)  
已知函数  $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ ),  $x=-\frac{\pi}{2}$  为  $f(x)$  的零点,  $x=\frac{\pi}{2}$  为  $y=f(x)$  图像的对称

### 抽象概括

抽象概括能力是对具体的、生动的实例,经过分析与提炼,发现研究对象的本质;从给定的大量信息材料中概括出一些结论,并能将其应用于解决问题或做出新的判断。

### 推理论证

推理论证是根据已知事实和已获得的正确数学命题,论证某一命题真实性的的重要手段,对推理论证能力基本要求是对问题或资料进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括;会用类比归纳和演绎进行推理;能合乎逻辑地、准确地表述。

### 运算求解

会根据法则、公式进行正确运算、变形和数据处理,能根据问题的条件,寻找与设计合理、简捷的运算途径;根据要求对数据进行估计和近似计算。

## 推理论证能力考查途径：三种语言、数据处理、综合考查



# 三是如何细化关键能力评价要求

## 第二步：研究关键能力的考查要求

### 数学关键能力

第24卷第3期  
2017年4月  
数学教育学报  
JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION  
Vol.24, No.3  
Apr. 2017

#### 数学高考中实践能力考查研究

陈 昂、任子新

(教育部考试中心, 北京 100864)

摘要: 实践能力是数学学科的一个重要能力, 近年来的高考试题加强了对实践应用能力的考查, 体现了数学在解决实际问题中的能力和应用价值。实践应用能力的考查过程分为以下几个阶段: 表征分析阶段, 提炼数量关系阶段, 数学建模阶段。高考试题呈现了不同的考查方式, 设置了不同的考查方法。

关键词: 高考; 实践能力; 应用能力; 数学建模

中图分类号: G420 文献标识码: A 文章编号: 1004-9894 (2017) 03-0015-04

#### 1 引 言

进入新世纪后, 为进一步增强国家的综合国力, 提升人才培养的质量, 世界各发达国家纷纷开展对学生素质的相关研究。中国的《国家中长期教育改革和发展规划纲要 (2010—2020 年)》(以下简称《纲要》) 中明确提出了“坚持以人为本, 全面实施素质教育” 作为教育改革发展的战略主题, 其中重点强调向全体学生、促进学生全面发展, 着力提高学生的学习兴趣和主动参与社会的责任感, 勇于探索的精神和善于解决问题的实践能力<sup>[1]</sup>。近年来, 为落实《纲要》精神, 数学高考在实践应用能力考查的命题上进行了积极的探索和创新。

数学教育的发展与社会实践紧密相连。数学、数学与人类社会和经济社会发展密切相关。这种关系是双向的。一方面, 数学的发展依赖于社会环境, 受社会经济、政治、文化等诸多因素的影响; 另一方面, 数学的发展又反过来对人类社会的进步起到推动作用, 包括对人类物质文明和精神文明两大方面的影响。20 世纪以来, 数学向社会、经济和自然等各个领域渗透, 扩展了数学与实际的接触面。数学科学应用于经济建设、社会发展和日常生活的范围较方式发生了深刻的变化<sup>[2]</sup>。数学在精密仪器、人工智能、大数据分析等领域的应用已经融入了人们的生活。近年来的高考数学试题紧密结合社会发展考查学生的实践能力, 体现了实践应用能力的考查, 体现了数学在解决实际问题中的巨大威力和应用价值, 体现了教育在增强实践性、应用性的要求。

#### 2 实践应用能力的考查方法

数学实践应用能力是学生在主动参与和体验数学知识发生和发展过程, 并运用数学知识、思想和方法对实际问题进行分析研究, 并解决问题的能力。在考查过程中, 可以将实践应用能力的考查分为以下几个阶段: 表征分析阶段, 提炼数量关系阶段, 数学建模阶段。在实际命题过程中, 需

### 直观想象

能根据条件做出正确的图形, 根据图形想象出直观形象; 能正确地分析出图形中基本元素及其相互关系; 能对图形进行分解、组合; 会运用图形与图表等手段形象地揭示问题的本质。

### 数学建模

数学建模能力是指学生主动参与和体验数学知识发生和发展过程, 并运用数学知识、思想和方法对实际问题进行分析研究, 并解决问题的能力。

### 数据分析

数据分析能力主要是指针对研究对象的特殊性, 选择合理收集数据的方法, 根据问题的具体情况, 选取合适统计方法整理数据, 并构建模型对数据进行分析、推断, 获得结论。

## 实践应用能力考查途径: 表征分析、提炼关系、数学建模

# 三是如何细化关键能力评价要求

## 第三步：将考查要求转化为评价要求

关键能力	评价要求
运算求解	能根据等差（等比）数列的通项公式以及前 $n$ 项和公式正确列出关于首项、公差（公比）等基本量的方程或方程组，通过解方程或方程组求出数列的指定项、通项以及前 $n$ 项和，通过对等差（等比）数列的性质以及一些常用的变形手段的合理运用，寻求简洁的解题途径、简化复杂的数式运算。
推理论证	能根据等差（等比）数列的定义、公式与性质，合理运用构造法、待定系数法、反证法、倒序相加、错项相减等数学方法，通过观察、比较、分析、综合、抽象、概括、归纳、演绎等思维过程进行判断、推理与证明。
数学建模	能从具体实际问题中抽象并建立数列模型，并能运用数列有关知识加以解决，能综合运用数列有关知识解决与数列有关的探索性问题、存在问题、开放性问题以及数列与函数、方程、不等式等综合的问题。

# 三、实施策略

## 三维评价要求的匹配解析

### 操作策略之二：分层选题匹配

■在此基础上，再结合每一个核心知识的学业要求，分别从评价层次、思想方法和关键能力的角度，按照“了解”层次配一个例题、“理解”层次配两个例题（了解、理解各一个）、“掌握”层次配三个例题（了解、理解、掌握各一个）的方式细化匹配，落实学业质量的评价要求。

# (三) 命题建议

## 一是如何体现学业水平测试的命题意图

### 突出三个重视

#### 重视对核心知识的评价

以本章的核心知识为素材，突出评价学生对有关核心概念、定理性质和公式法则等的了解、理解和掌握程度。

#### 重视对思想方法的评价

以本章的基本问题为载体，充分体现数学思想方法具有融合性和统领性的评价特点，反映在测试题目上表现为一题多评（或多题一评），并将其中最突出的一种作为主要思想方法，重在评价学生对数学本质的理解。

#### 重视对关键能力的评价

以本章的简单应用为依托，充分体现数学能力具有综合性和结构性的评价特点，反映在测试题目上表现为一题多评（或多题一评），并将其中最突出的一个作为关键能力，重在评价学生的数学思维品质。

# (三) 命题建议

## 一是如何体现学业水平测试的命题意图

突出三维立意

“四基”的掌握和灵活运用——素养立意

“三基”的理解和综合应用——能力立意

“双基”的了解和简单套用——知识立意

# 二是如何编制双向多维细目表

## 第一步：宏观设计

### 整体 谋篇布局

以本章学业要求的达成为目标，以学业质量标准水平一为主，适当兼顾水平二，规划全卷难度

### 题组 功能设计

以体现数学核心素养的达成为取向，从核心知识、思想方法和关键能力三个维度，细化评价要求

### 题型 协调搭配

以突出通性通法为原则，从选填解三类题型出发，兼顾应用型、开放型和探究型，融入数学文化

### 全卷 重组整合

以实现“一体三层三维”评价体系为宗旨，从一题多评和多题一评的角度，审示核心素养的落实程度

# 二是如何编制双向多维细目表

## 第二步：微观操作

题型	题号	问题情境	核心知识	评价要求	思想方法	核心能力
选择题	1	现实(B)	等差数列求和	掌握	化归与转化	抽象概括
填空题						
解答题						

# 三、实施策略

## 三是数学核心素养的落实举措

### 操作策略之三：分层具体落实

- 核心知识评价侧重于“双基”的落实，思想方法评价侧重于通性通法的掌握，关键能力评价侧重于基本数学活动经验的积累；
- 核心知识评价中有思想方法的融入，思想方法评价中有基本技能的结合，关键能力评价中又不乏对“双基”的要求，以实现三维评价的融通。



# 三是数学核心素养的落实举措

## 四种做法——以“数列”为例

1. 依托基本量，突出数学运算
2. 借助类比法，突出逻辑推理
3. 赋予时代感，突出数学建模
4. 融入数学史，弘扬数学文化

**结语**

## **知识-方法-能力**

**让数学学业质量测评落实、落小、落细**

一孔之见，仅供参考！  
不当之处，敬请指正！  
**谢谢！**