

核心素养导向下运算律教学的应然与应为

王逸骏，戴新怡

摘要：运算律的教学不仅需要发展学生的运算能力，还需要关注学生的符号意识与推理意识，发展代数思维。运算律的教学应当遵循课标要求，明晰关键素养；深挖运算意义，把握运算律内涵；关注推理形式，合情走向演绎。运算律教学应强化与运算意义的联系，体现一致性；让学生经历发现规律的完整过程，发展推理意识；运用多元表征验证猜想，渗透模型意识；深挖等式与字母背后的意义，提升代数思维。

关键词：数学核心素养；加法意义；运算律

运算的意义、运算律以及运算的法则是小学数学运算教学的基本组成部分。基于运算的意义，可以推导出运算律；基于意义与运算律，又可以进一步推导出运算法则。在代数中，运算律的地位极为重要。项武义指出，简朴得几乎是笨拙的运算律就是整个代数学的基础。^[1]

小学阶段学生主要学习加法和乘法的交换律、加法和乘法的结合律以及乘法对加法的分配律这五大运算律。现行多个版本教材都将运算律内容编排在四年级，即运算律在之前所学内容中隐而不明，直到四年级才正式学习。

然而，目前对于运算律的教学基本都从不完全归纳法开始，即由数学问题抽象出等式，再模仿着写几个这样的等式，发现写不完后就用字母表示运算律，最终揭示运算律，并在简便计算或解决问题中进行应用。这样的教学方式看似合乎情理，实则存在着两大隐患。一是容易造成经验主义。在数学中，如果想要说明某个结论正确，就需要严格的数学证明。尽管对于小学生来说不需要通过演绎推理来证明某个结论的正确性，但

至少要让学生理解：对于某个结论能举出无穷多的正例并不能说明其正确，还得保证不存在反例。教师如果仅仅通过让学生举一些正例来说明某一运算律是正确的，就容易助长学生在学习数学时的不严谨习惯。二是违背了发现规律的一般过程。数学规律的发现要经历观察现象—描述特征—举例（有无反例）—提出假设—进行验证的过程，而上述的教学方法割断了这一过程，即由观察现象后直接给出假设，再去通过举例来说明这一假设的正确性，这就导致了学生进入中学后对于证明的不适应，容易出现“用结论证结论”的现象。

若要消除这两大隐患，笔者认为必须得先回应三个问题：一是运算律的本质是什么；二是四年级教学运算律究竟要教什么，发展学生哪些素养；三是核心素养导向下的运算律教学究竟应该怎么教，教到何种程度。对于第一个问题，刘加霞论述得较为清楚，认为运算律的“源”在于加法与乘法意义，减法和除法的性质则为“流”，两者都承载着各自的育人价值。^[2]本文主要在此

基金项目：江苏省教育科学“十四五”规划重点课题“基于学习进阶的小学数学单元教学设计与实践研究”（B/2022/03/99）。

作者简介：王逸骏，江苏省苏州市实验小学教师（苏州 215000）；戴新怡，江苏省苏州香雪海小学教师（苏州 215100）。

基础上对后两个问题进行探讨,为一线教师开展运算律教学提供理论依据与实施建议。

一、运算律教学的应然

(一) 遵循课标要求,明晰关键素养

《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称“新课标”)在学业要求中明确指出,“能说出运算律的含义,并能用字母表示;能运用运算律进行简便运算,解决相关的简单实际问题,形成运算能力”^{[3]22}。随后在教学提示中作了进一步说明:“通过实际问题和具体计算,引导学生用归纳的方法探索运算律、用字母表示运算律,感知运算律是确定算理和算法的重要依据,形成初步的代数思维。”^{[3]23}可见,运算律教学在显性层面是为了发展学生的运算能力,但在隐形层面对学生符号意识、推理意识的培育有着至关重要的作用,教师需要格外关注。

首先,符号意识强调学生能够初步运用符号表示数量、关系和一般规律,知道用符号表达的运算规律和推理结论具有一般性。任何加法或乘法运算律的教学最终都要从具体的实例抽象到用字母表示的代数式,并了解用字母表示的代数式具有概括性与简洁性。上述过程与符号意识的内涵在本质上是完全一致的,是发展学生代数思维必不可少的一环。

其次,推理意识的培养需要让学生知道可以从一些事实和命题出发,依据规则推出其他命题与结论,并能通过简单的归纳或类比,猜想或发现一些初步的结论。新课标的教学提示中明确提出,教师要引导学生用归纳的方法探索运算律,这便是推理意识在运算律教学中的培养。除此以外,在教师教学完交换律或结合律后,学生要会自然而然地去类比猜想其他运算是否存在交换律或结合律,进而进行验证。这一过程暗合数学中合情推理的一般步骤,教师在课上需着重引导学生往这方面进行猜想。

(二) 深挖运算意义,把握运算律内涵

运算律是确定算理和算法的重要依据,但运算的意义是运算律教学的基础。正如刘加霞所说,运算律的本质便是运算的意义,所以在教学时教师应当知晓运算律与运算意义之间的联系。以交换律为例,张奠宙认为,现行教材中教学加

法交换律时,就是让学生拿两个数来验证一下 $5+6=6+5$,然后让学生分组举一些例子,归纳得出加法交换律成立。至于为什么可以交换,没有从本源上说清道理。而想要说明加法交换律为何成立,实则很简单,就是“数数”。A、B两堆石子,先数A堆的数量再数B堆的数量,与先数B堆的数量再数A堆的数量,最后的结果都是一样的,这就是交换律成立的说明,^[4]其本质就是加法意义的延伸。

(三) 关注推理形式,合情走向演绎

数学推理在形式上可分为合情推理与演绎推理。演绎推理从一般性前提推出具体结论,具有必然性,其中以“三段论”的形式被人们所熟知。合情推理可细分为归纳推理与类比推理。归纳推理重在由特殊案例推广到一般规律,如观察数列前几项猜测通项公式。类比推理则强调在原推理的基础上进行类比,比如学习完加法交换律,类比推理乘法也存在交换律。由此可见,合情推理其实是基于经验、直觉或部分证据的或然性推理,结论不一定正确。运算律的教学在小学阶段虽强调让学生以归纳推理的方式感悟运算律,经历不完全归纳的过程,但若仅停留在这一阶段就容易造成学生的思维浅表化、松散化。故在实际教学时,教师至少应当关注三点:一是借助模型直观来解释说明为何会存在运算律,让学生的思维逐步地严谨与深入;二是在学习完某一运算律后,激发学生的类比推理意识,让学生主动思考与提问其他运算中是否存在类似的规律,继而验证;三是让学生经历发现数学规律的一般过程后,引导其将探索规律的方法迁移到之后其他运算律的学习中,让其推理水平逐步由“合情”走向“演绎”。

二、运算律教学的应为

(一) 强化与运算意义的联系,体现一致性

巩子坤认为,所有运算的算理均来自运算律与等式的性质^[5],而运算的意义又是运算律的基础,所以在运算律教学时一定要强化其与运算意义的关联。这既是运算律教学本身的需要,也是数与运算一致性的体现。

以“交换律”一课为例,如果要说明加法为何存在交换律,首先得明晰加法的意义。加法的

概念来自于添加和合并两种操作活动。添加是指原有数量 A，在 A 的基础上加上数量 B，强调一种动态的过程；合并是指情境中原来有数量 A 和 B，想要知道 A 与 B 的总数，可将 A 和 B 合在一起，强调一种静态的过程。无论是加法的哪种意义，想要得到添加或合并后的结果，都需要依靠数数，这一点在新的苏教版数学教材中有较为明显的体现。故在教学伊始，教师可以采用以下两种方式进行导入。

1. 给学生两个数字，让其写出不同的加法算式，再根据算式编数学故事。

2. 出示一些加法问题，让学生思考：解决这些问题该如何列式？为何这些问题都可以用加法解决？如果想得到最后的结果又该如何？

第一种导入方式旨在引导学生从加法算式出发，编出能用加法算式解决的数学问题，让学生感悟同一个加法算式可以解决不同的加法问题；第二种导入方式从实际的数学问题出发，引导学生思考为何问题不同，但都可以用加法解决，最终将学生引入对加法本质的思考。这两种导入方式都是从运算的本源出发，让学生在编写或解决问题的过程中初步感悟算式与运算意义的联系。这样做至少有两点好处：一是强化了学生对加法运算意义的理解，使学生对加法意义的理解螺旋上升，进一步丰富对加法模型的认识；二是在编写或解决问题的过程中巧妙地引出等式这一概念，为后续教学交换律埋下伏笔，使教与学的过渡更加自然。

(二) 让学生经历发现规律的完整过程，发展推理意识

低年级用不完全归纳法探究得到规律是可以的，但若到中高年级依旧采用这样的方法，就容易导致学生的思维在低空盘旋，无法进入深度思考的状态，常常全凭经验主义就判定规律的存在与否。如今非常强调各学段之间的衔接，若要做好小初衔接的工作，小学在中高年级阶段就应让学生的思维由合情推理逐步走向演绎推理，助力学生的推理意识逐层进阶。

以“结合律”教学为例，教师在由数学现象/问题进行导入并抽象出等式后，应当先让学生观察这些等式有什么特征，接着根据其特征进行举例，发现正例无法穷尽且反例又难以

寻觅时，再让学生提出猜想，最后通过验证去说明这个猜想正确与否。当然，这样的探究过程在学生之前的学习体验中可谓少之又少，不可能马上将这种探究方法自主迁移，所以在探究得到加法交换律后教师还需与学生一起回顾整个探究过程，并引导学生思考其他运算中是否也存在着这样的现象，使其反复经历这样的过程，促进其学习方法上的高通路迁移。这样的探究方法可以统摄整个运算律乃至今后其他数学规律与原理的学习，是运算律教学的一个关键价值。

(三) 运用多元表征验证猜想，渗透模型意识

那运算律到底应该如何验证呢？小学阶段应该教到什么程度才算是证明了运算律存在呢？以“加法交换律”的教学为例，如何才能验证“交换两个加数的位置，和不变”这一猜想呢？按照张奠宙所说，通过数两堆石子的例子进行说明固然可以，但石子的颗数只可能是正整数，无法推广到小数和分数层面，故借助数石子的故事让学生初步感知加法交换律是可行的，但若真正解释说明，还可以借助直观的线段模型，将抽象的代数知识可视化。比如，可以设计以下的探究任务。

【任务一】结合具体事例，初步感知交换律

探究单 1：“交换两个加数的位置，和不变”这个说法是否正确？结合图 1 解释说明。

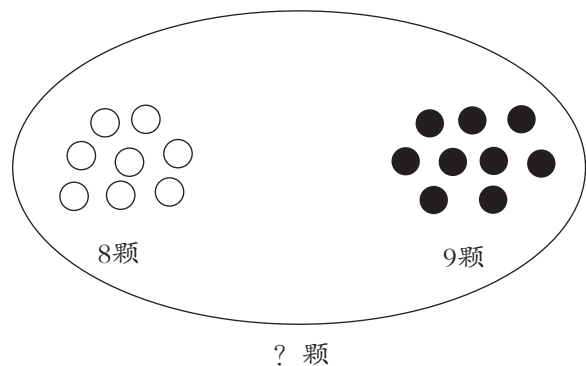


图 1 数珠子

1. 要数出图 1 中珠子的总数，可以先数____颗白珠，再接着数____颗黑珠；也可以先数____颗黑珠，再接着数____颗白珠；写成等式是：____ + ____ = ____ + ____。

2. 如果白珠和黑珠的数量不是 8 颗和 9 颗，

还能这样思考吗?

3. 我发现“交换两个加数的位置, 和不变”这个说法是_____的。(填“正确”或“错误”)

探究单 1 是基于导入时的“数数”活动, 让学生从数珠子的活动中写出等式, 并进一步思考如果珠子的数量发生变化, 是否还能按原思路思考。

探究单 2: “交换两个加数的位置, 和不变”这个说法是否正确? 结合图 2 解释说明。

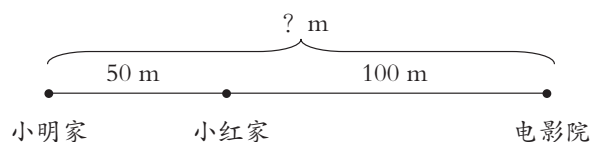


图 2 计算路程

1. 要计算小明家到电影院的总路程, 可以列式为: _____; 也可以列式为: _____; 写成等式是: _____ + _____ = _____ + _____。

2. 如果两点间的距离不是 50 m 和 100 m, 而是其他的数据, 还能这样思考吗?

3. “交换两个加数的位置, 和不变”, 这个说法是_____的。(填“正确”或“错误”)

探究单 2 脱离“数数”活动, 直接从加法的合并意义去写出等式, 并将实物模型抽象到线段模型, 让学生在先者的基础上进一步感悟加法交换律。

两张探究单可以同时下发在小组内, 让学生在完成后进行相互交流与分享, 为学生解释说明加法交换律提供更多的直观表征。

【任务二】借助线段模型, 深度理解

在经历上述探究活动后, 学生正处于“悱”的状态, 口欲言而不能。教师紧接着在课件上隐去地点, 将线段下移并交换位置 (见图 3), 再隐去单位, 追问学生, 能否讲一个数学故事, 进一步说明自己的猜想是正确的。数学故事可以不同, 但都要用 $50+100=100+50$ 这个等式进行说明。这能让学生体会到该模型可以适用于多种情境。然后, 将数字也隐去, 出示新的线段模型, 让学生再通过讲数学故事来说明自己的猜想是正确的。此时学生发现任意数、任意情境, 都可以通过这样的线段模型去解释说明自己猜想的正确性, 也就完成了验证, 得到了加法交换律。

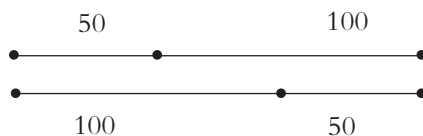


图 3 线段模型 1

这样的探究任务沿着学生的“最近发展区”螺旋上升, 既从数学的角度解释说明了加法交换律, 又在不知不觉中发展了学生的模型意识。当然, 这里还需注意的一点是, 以往的教材在探索整数的运算律后, 自然而然地推广到了小数和分数, 但这并不严谨, 还需进行证明。以乘法交换律为例, 学生在未学习小数和分数的四则运算时, 采用点阵图进行解释说明是完全成立的, 但若等学生学习之后再推广时, 应该逐步抽象到长方形的面积模型, 打破点阵图只能表示整数的限制。当然, 在整个运算律的教学中应当贯穿几何模型, 并让学生借助可视化的几何模型去解释说明运算律的意义。

(四) 深挖等式与字母背后的意义, 提升代数思维

新课标特别强调运算律的教学承载着提升学生代数思维的任务, 这究竟如何在教学中体现呢? 笔者认为, 至少应当关注以下两点。

一是, 由数学问题抽象出等式时, 要强调意义而非结果。如果关注结果, 那其实还是在培养学生的算术思维, 即这样的一个加法算式得到的结果是什么。而关注运算的意义, 则是由加法的合并意义得出无论是先数整体中的哪一部分, 最终都是两部分进行合并。如此发展的便是代数思维。

二是, 要突出字母表示运算律背后的意义与价值。在以往的教学, 学生发现正例无法穷尽时教师便会引导学生去思考可以怎样加以概括。学生可能会用文字、符号或者是字母, 但这对学生来说只是依葫芦画瓢, 并未真正理解字母表示运算律背后承载的意义与价值。故在运算律单元教学伊始, 教师应着重引导学生思考两点: $a+5=5+a$ 能否表示加法交换律; 为什么 $a+b=b+a$ 能够概括加法交换律。第一个问题的目的在于, 让学生在辨析中理解如果等式中出现了具体的数字, 如例子中的“5”, 那么其中一个加数就固定成了 5, 无法概括所有情况, 所以这样的

等式并不能表示加法交换律。第二个问题的目的在于，让学生知道 a 和 b 可以是任意数， $a+b$ 和 $b+a$ 表示两个加数位置交换，仍然是计算它们的总和，所以可以用等号连接。这既强化对加法交换律的理解，也突出字母在表示数时的任意性。这样一来，学生对于用字母表示运算律的意义与价值就由原来浅表的理解逐步走向了深度理解，符号意识与代数思维也在此过程中悄然提升。此外，考虑到字母表示运算律的抽象性，诸如此类的问题可以在教学其他运算律时反复使用，举一反三，夯实学生的代数思维。

运算律是我们进行数学运算的重要依据，也是整个代数学的基石。基本运算律以及初中阶段要学习的指数运算法则，被统称为“数与代数”领域的“通性通法”，而被称为通性通法的数学内容都是最根本、最重要的。马云鹏在提取小学数学大观念时也将“运算律是四则运算算理的依据”作为数与运算主题下的三个大观念之一，强调在学习运算律知识之前虽然不用运算律解释算理，但教师应当有意识地引导学生体会运算的合理性，直观说明其中的道理。在学习运算律后，应当有意识地运用运算律解释算理，通过回顾与反思体会数运算的一致性。由此可见，教师在教学运算律时自己必须先深度理解其本质，不然就难以帮助学生构筑完整的运算体系。

关于运算律的教学，其实还有诸多值得探讨的问题。例如，如果将 $38+54+62$ 转变为 $54+38+62$ 后再进行简算究竟用到了哪些运算律？可能不少教师认为这仅仅是交换了“38”和“54”的位置，应当是运用了加法交换律。但细想，既然要先算后面的 $38+62$ ，已经改变了运算顺序，所以还用到了加法的结合律。再如 a 、

b 、 c 三个数相加，其实可以写出 6 个不同的加法算式： $a+b+c$ 、 $a+c+b$ 、 $b+a+c$ 、 $b+c+a$ 、 $c+a+b$ 、 $c+b+a$ ，为何最终只用 $(a+b)+c=a+(b+c)$ 这一个算式来表示结合律？笔者认为，只有教师真正深度思考了诸如此类的问题，彻底明晰了运算律的本质，数与运算的一致性才能真正实现，学生的数学素养才能得以真正落实。

参考文献：

- [1] 项武义. 基础代数学 [M]. 北京：人民教育出版社，2004：5-10.
- [2] 刘加霞. 运算律的本质、内容进阶与教学建议 [J]. 教学月刊·小学版（数学），2023（12）：18-22.
- [3] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准（2022 年版） [S]. 北京：北京师范大学出版社，2022.
- [4] 张奠宙，戎松魁. 正本清源，通过“数数”活动理解运算律：关于加法和乘法交换律的讨论 [J]. 教学月刊·小学版（数学），2015（6）：4-6.
- [5] 巩子坤，史宁中，张丹. 义务教育数学课程标准修订的新视角：数的概念与运算的一致性 [J]. 课程·教材·教法，2022（6）：45-51.
- [6] 陈六一. 着力于数学能力的增长而教：“加法交换律和结合律”教学实录与反思 [J]. 小学数学教育，2018（11）：27-29.
- [7] 巩子坤，张奠宙，任敏龙，等. 教学运算律，须先厘清运算的本质 [J]. 小学数学教师，2017（7/8）：15-18.
- [8] 刘晓萍. 基于学科关键能力发展的核心知识教学研究：以“加法交换律和结合律”一课教学为例 [J]. 小学数学教育，2018（11）：31-32.

（责任编辑：李 冰）