第7卷第1期
2024年1月

中国教育科学
Education Sciences in China

Vol. 7，No. 1
January，2024

试论数学教育中模式与模型构建的思维方式

史宁中

摘要：在大数据时代背景下，模式与模型成为数学教育讨论的热点问题之一。对于模式与模型的概念、二者间的关联以及如何构建模式与模型的思维范式等问题的探讨对推进数学建模研究至关重要。模式是构建数学模型的本原，模型是用数学的语言讲述现实世界的故事。数学概念经历了现实的和逻辑的两次抽象，命题模式构建需要经历“三阶段”，数学模型的构建需要“三化”的思维范式。简约和想象是数学模型构建的核心思维特征。简约是基于现实与逻辑的抽象；想象是实践经验与思维经验的复合。

关键词：模式；模型；课程标准；思维方式

中图分类号：G520　**文献标识码**：A　**文章编号**：2096-6024(2024)01-0003-09

伴随着大数据时代的到来，模式成为一个新的概念，也成为数学教育争论的焦点问题。2003年的《普通高中数学课程标准（实验）》（以下简称“课标”）把数学建模列为课程内容，并提出了具体的课程设计与要求。《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》提出，数学建模作为数学核心素养，要求把数学建模理念贯穿整个高中数学教育，把数学建模作为内容主线。这是中国基础教育阶段数学课程发展的一个标志性结果。《义务教育数学课程标准（2022年版）》明确提出，小学阶段要培养模型意识，初中阶段建立模型观念。数学建模活动是运用模型思想解决实际问题的一类综合实践活动，也是中学数学课程的一条主线。这逐渐成为数学教育的热点问题之一。模型与模式如何界定，二者间的关联怎样，如何构建模式与模型的思维方式，这些都对推进数学建模研究至关重要。

一、模式是构建数学模型的本原

模式是20世纪末逐渐形成的新概念，这个概念的出现伴随着海量数据的分析变为可能。以至于有许多学者认为，数学模式就是数学本身，数学是一门关于模式的科学。关于模式，美国数学家、数学教育家斯蒂恩给出了下面的论述。①

数学是模式的科学。数学家寻求数量、空间、科学、计算机以及想象中的模式。数学理论则解释了模式之间的关系，函数和映射、算子和同态把一类模式转化为另一类模式，产生了近来的一些数学结构。数学的应用就是用这些模式来解释和预测适合于这些模式的自然现象。模式又提出其他

作者简介：史宁中，东北师范大学数学与统计学院教授，博士生导师（长春　130024）。

① STEEN L A. The science of patterns [J]. Science，1988 (240)：611-616.

模式，产生模式的模式。数学以这样的方法遵循着自己的逻辑：起始于科学的模式，完成于那些累加起来的、由初始模式推导出来的所有模式。理论则作为模式的模式，其重要性取决于一个领域的模式与其他领域模式的关联度。具有最大解释能力的精巧的模式成为最深刻的结果，构成全部子学科的基础。

模式是对某类事物（或对象）具有共性表现形式的描述，是一种特定关系和结构，模式类似于模型，但又不完全等同于模型。相同之处在于：二者都是程式化了的东西，都是认识、表达、解决一类问题的方法。不同之处在于：模式是针对数学内部的，是认识、表达、解决一类数学问题的方法；模型是针对数学外部的，是认识、表达、解决一类现实问题的方法。据此，我们定义：模式是指认识、表达、解决一类数学问题的程式化的方法①，是构建数学模型的本原。

虽然模式不同于模型，但是一个好的数学模式可以适用于一批数学模型，或者说，一个好的数学模式可以作为构建一批数学模型的数学语言。这样，我们就解决了生活中的数学模型难以归类的问题。生活中的数学模型与自然界的数学模型有着本质的不同：后者的主旨是探究因果关系，表达的是规律性的东西，这些东西是可以重复的；前者则与自由意志有关，自由意志是人性的体现，是人的本能，人的自由意志决定了生活中数学模型的繁杂与不确定。因此，我们不直接讨论生活中的数学模型，而是讨论用来构建生活中数学模型的模式，这可以帮助我们加深对数学本质的理解，弄清楚数学模型的构建过程。

二、数学模型用数学的语言讲述现实世界的故事

数学模型与人们通常所说的数学应用是有区别的：数学应用涉及的范围相当宽泛，可以泛指应用数学的方法解决实际问题的所有事情；数学模型更侧重用数学创造出来的概念、原理和方法，描述现实世界中那些规律性的东西。通俗地说，数学模型是用数学的语言讲述现实世界中与数量、图形有关的故事。数学模型使数学走出了自我封闭的世界，构建了数学与现实世界的桥梁。关于这一点，伽利略的经验之谈是最好的诠释：

哲学被写在那本曾经展现于我们眼前的伟大之书上，这里我指的是宇宙。但是如果我们不首先学会用来书写它的语言和符号，我们就无法理解它。这本书是以数学语言写的，它的符号就是三角形、圆和其他几何图形，没有这些符号的帮助，我们简直无法理解它的片言只语；没有这些符号，我们只能在黑暗的迷宫中徒劳地摸索。②

因此，数学模型的出发点往往不是数学，而是讲述现实世界中的那些故事；数学模型的研究手法也不是单向的，需要从数学和现实这两个出发点开始。这就像建筑桥梁一样，在建筑之前必须清楚要把桥梁建在哪里，要在此岸和彼岸同时设计桥墩的具体位置。构建数学模型的大体流程是：从两个出发点开始，规划研究路径、确立描述用语、验证研究结果、解释结果含义，从而得到与现实世界相容的、可以用来描述现实世界的数学表达。在现实世界中，放之四海而皆准的东西是不存在的，因此，一个数学模型必然有其适用范围，这个适用范围通常表现于模型的假设前提、模型的初始值，以及对模型中参数的限制。在这个意义上，所有数学的形式，诸如函数、方程等，本身都不是数学模型，而是可以用来构建模型的数学语言。③

因为数学模型具有数学和现实这两个出发点，所以数学模型不完全属于数学。事实上，大多数

---

① 史宁中. 数学基本思想18讲［M］. 北京：北京师范大学出版社，2016：271-273.

② BURTT E A. 近代物理科学的形而上学基础［M］. 徐向东，译. 北京：北京大学出版社，2003：56.

③ 史宁中. 漫谈数学的基本思想［J］. 中国大学教学，2011（7）：9-11.

应用性很强的数学模型的命名，都依赖于所描述的学科背景。比如，在生物中的种群增长模型、基因复制模型，在医药学中的专家诊断模型、疾病靶向模型，在气象学中的气环流模型、中长期预报模型，在地质学中的板块构造模型、地下水模型，在经济学中的股票衍生模型、组合投资模型，在管理学中的投入产出模型、人力资源模型，在社会学中的人口发展模型、信息传播模型。在物理学和化学中，各类数学模型更是不胜枚举。①

数学模型描述的是现实世界的故事，因此，数学模型不仅研究的出发点不是数学本身，就是价值取向也不是数学本身，而是描述现实世界的作用，从日常生活购物的斤斤两两，到浩瀚宇宙星座间距离的度量，几乎涉及现实生活的各个领域。数学模型属于数学的应用，但与通常所说的数学应用有着非常本质的区别，这个区别使得数学模型的思想与数学应用的思想也不尽相同。我们之所以把模型称为一种数学思想，这与数学模型的功能有关。虽然数学模型属于数学应用的范畴，但主要是指：用数学所创造出来的概念、原理和方法，理解、描述和解决现实世界中的一类问题。这类问题往往蕴含着某种事物发生的规律性，或者说，蕴含着某种事物发展的必然性。因此，模型思想是指，能够有意识地用数学的概念、原理和方法，理解、描述以及解决现实世界中一类问题的那种思想。进一步，掌握模型思想就是：把握现实世界中一类问题的本质与规律、用恰当的数学语言描述问题的本质与规律、用合适的数学符号表达问题的本质与规律。简而言之，模型思想就是用数学的语言讲述现实世界的故事，数学模型构建了数学与现实世界的桥梁，数学借助数学模型回归现实世界。②

数学对于现实世界的回归是极为重要的，也就是说，数学模型对数学的发展是极为重要的，因为数学家必然会从数学的角度审视模型中的数学表达，汲取“创造数学”的灵感，促进数学自身的发展就是在讲述现实世界的故事中产生与发展起来的。甚至可以认为，数学模型的构建与应用，是现代数学得以健康发展的重要源泉。正如冯·诺伊曼的所言：

数学思想来源于经验，我想这一点是比较接近真理的。真理实在太复杂，对之只能说接近，别的都不能说。…… 数学思想一旦被构思出来，这门学科就开始经历它本身所特有的生命。事实上，认为数学是一门创造性的、受审美因素支配的学科，比认为数学是一门别的事物，特别是经验的学科要更确切一些。…… 换句话说，在距离经验本源很远很远的地方，或者在多次“抽象的”近亲繁殖之后，一门数学学科就有退化的危险。③

在上述论述中，关于“数学经过多次抽象之后可能出现近亲繁殖、可能带来退化的危险”的警告是值得充分重视的，很显然，避免数学退化最简单的办法就是注重数学与现实世界的联系，而联系的最重要的途径就是数学模型。合理的思维过程具有理性加工的功能，而现实世界的那些东西一旦经过理性的加工，或者说，现实世界的那些东西一旦经过数学的描述，就具有了一般性和真实性。而数学模型就是这种理性加工的范例，数学对于解释现实世界是无能为力的，但利用数学能够更好地描述现实世界。正因为如此，数学模型的价值取向往往不是数学本身，而是数学模型在描述现实世界中所起到的作用；数学模型的研究手法也不是单向的，需要同时从数学的角度、现实问题的角度思考，才可能启发数学家的灵感，创造出新的数学。

三、数学模式构建的思维方式

数学模式大体上可以分为两类：一类是基于文字表达的，包括数学的定义和命题，这类模式可

① 史宁中. 漫谈数学的基本思想［J］. 中国大学教学，2011（7）：9-11.

② 史宁中. 数学思想概论：第5辑：自然界中的数学模型［M］. 长春：东北师范大学出版社，2012：12-15.

③ 中国科学院自然科学史研究所数学史组. 数学史译文集［M］. 刘金顺，何绍庚，译. 上海：上海科学技术出版社，1981：123.

以用来指导如何构建、理解数学的概念和定理；一类是基于算式表达的，包括一些函数和方程，这类模式可以用来启迪如何提出、解决数学问题，既包括数学中的问题，也包括生活中的和科学中的问题。因为数学模式是构建数学模型的本原，所以有时人们直接把数学模式称为数学模型。比如线性模型，其本意是处理一类线性的数量关系，是数学内部的事情，但为了表述更加直接，在许多与应用数学有关的书中，不说线性关系或者线性模式，而直接称为线性模型。

（一）构建或者理解数学概念的思维模式

我们可以这样把握数学概念产生的思维过程：数学概念的形成是从特殊开始的，数学概念的思维是从直觉开始的。对于数学的抽象而言，构造的理性知识，或者说，具有结构的理性知识是非常重要的，因为数学最终要形成抽象结构，这个抽象结构包括对象、对象的关系或者运算法则。数学概念的抽象包括两个阶段。第一个阶段是感性抽象，人们通过对现实世界中数量与数量关系、图形与图形关系的抽象，得到了数学的基本概念。这些基本概念包括数学研究对象的定义、刻画研究对象关系的术语和计算方法。这种基于现实的抽象，是从感性具体上升到理性具体的思维过程。随着数学研究的深入，还必须进行第二个阶段的理性抽象，这个阶段的抽象是基于逻辑的。人们通过第二阶段的抽象，合理解释了那些通过第一次抽象已经得到了的数学概念，以及概念之间的关系。第二次抽象的特点是符号化、形式化和公理化，这是从理性具体上升到理性一般的思维过程。①②

但是，我们必须看到，尽管第二次抽象使得数学更加严谨，但第一次抽象才是更为本质的，因为第一次抽象创造出了新的概念、运算法则和基本原理，而第二次抽象只是更加严谨地解释这些创造。事实上，如果没有第一次抽象作为铺垫，我们将无法理解第二次抽象的真实含义，就像没有欧几里得几何作为铺垫，我们将无法理解希尔伯特所创造的几何公理体系到底说了些什么。因此，无论是从数学的角度把握事物的本质与规律，还是用数学的语言描述事物的本质与规律，思维基础都是抽象和推理。③

数学定义是抽象的结果。人们把日常生活和生产实践中所遇到的数量和图形抽象成概念、借助定义的形式进行表达，这些定义就成了数学研究的对象。④基础教育阶段的数学教育陷入了两难的境地：采用揭示内涵的定义无法保证数学的严谨，采用名义定义无法理解公理体系的逻辑。为此，我们应当独辟蹊径：汲取两种定义的合理内核，归纳出一种人们通常认识基本概念的思维模式，进而形成一种切实可行的教学模式。这个思维模式的核心就是“对应”，也就是说，采用对应的方法来认识和理解基本概念。确立了数学研究最基本的概念，就确立了数学表达的最基本话语，利用这样的基本话语就可以表达研究对象的基本属性，进而构建表达研究对象内涵的定义，表达研究对象内涵的定义称为实质定义，而构建实质定义的思维模式就是建立属加种差关系。

（二）构建数学命题的思维模式

我们把数学命题严格地划分为两类：一类是性质命题，另一类是关系命题。在构建命题时，条件和结论是想象的；在理解命题时，条件和结论是已知的。其中所说的想象是指数学的想象，是从经验过的东西推断未曾经验的东西，因此属于归纳推理的范畴。证明命题固然重要，但更重要的是得到命题。这也是数学创新所在。因此，创新思维更多地蕴含在构建数学命题的过程中。所有数学命题的起始都基于经验，这些经验表明命题的结论适用于个别的情况，或者说，适用于较小的范围，然后人们通过联想和想象，推断命题的结论可能适用于一般的情况，或者说，适用于更大的范围。

---

①④ 史宁中．数学基本思想18讲［M］．北京：北京师范大学出版社，2016：240.

② 史宁中．数学思想概论：自然界中的数学模型［M］．长春：东北师范大学出版社，2012：2-4.

③ 史宁中．数学的抽象［J］．东北师大学报（哲学社会科学版），2008（5）：169-181.

因此，构建数学命题依赖的是归纳推理，这是一个从特殊到一般的思维过程。

例如，探究三角形的点线面之间的关系。一个凸多面体上，顶点、棱、面个数之间蕴含着一个被称为欧拉示性数的不变量$V-E+F=2$。我们称为公式（1），其中，V、E、F 分别表示凸多面体顶点、棱、面的个数，2 就是被称为欧拉示性数的不变量。

考虑这样的数学情境：在平面上，若干个相连的三角形组成一个图形（见图 1）。我们关心的结论是：这个关系中是否存在不变量。对于教师来说，可能已经知道这个关系，这个关系可以表示为三角形个数 ＋ 三角形顶点个数 ＝ 三角形边个数 ＋ 1，记为公式（2）。

显然，经常让学生经历这样的探求命题或者公式的过程，对于帮助学生积累正确思维的经验是非常有益的。

可以看到，（2）与（1）是类似的。事实上，通过（2）的验证过程可以得到（1）的证明思路。因为（2）是在平面上考虑问题，（1）是在空间考虑问题，因此与（1）比较，这时的欧拉数应当为 1。现在，问题的关键是，如何让学生通过经验得到（2）式。

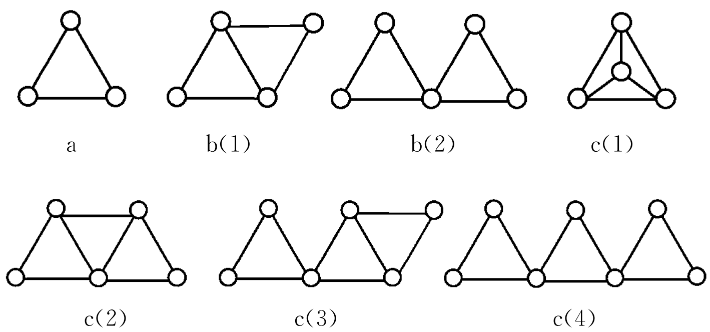

图 1　由三角形组成图形中点、线、面之间的关系

在具体讨论之前，必须明确两个基本概念。第一个概念是“三角形的组成”：三角形是由三个顶点和三条边组成的，一条边包含两个，并且只有两个顶点（见图 1）。这样，三角形的内部不能含有顶点，比如，图 c(1) 表示的是三个三角形而不是四个三角形。同样，一个边不能包含三个或者三个以上的顶点，比如，图 c(2) 下面的这条线段表示的是两个边而不是一个边或者三个边。第二个概念是“两个三角形相连”：相连的两个三角形至少有一个共同的顶点。这样，由两个三角形相连所组成的图形，至少有四个顶点，如图 b(1)，至多有五个顶点，如图 b(2)。由三个三角形相连所组成的图形，至少有四个顶点，如图 c(1)，至多有七个顶点，如图 c(4)。明晰了基本概念，就为依次序变化地进行数学实验奠定了基础。

第一步：化简问题，实验尝试。这个步骤类似物理、化学等自然学科的尝试性实验。为了便于操作，需要把问题转化为最简单的形式。依次序考虑图形由一个三角形组成、两个三角形相连组成、三个三角形相连组成。

可以看到，由两个三角形组成的图形，有顶点个数为 4 和 5 两种情况；由三个三角形组成的图形，有顶点个数为 4、5、6 和 7 四种情况。得到具体数据如下：

三角形个数	顶点个数	边个数
1	3	3
2	4	5
2	5	6

3	4	6
3	5	7
3	6	8
3	7	9

第二步：探索规律，符号表达。通过对上面的数值的简单计算，容易看出图形的点、线、面的个数之间存在下面的关系：

$1+3=3+1$；

$2+4=5+1$，$2+5=6+1$；

$3+4=6+1$，$3+5=7+1$，$3+6=8+1$，$3+7=9+1$。

这与（2）式所表达的结果是一致的。

第三步：还原问题，得到规律。如果在化简问题中得到了规律，那么就可以猜想这个规律在原来的问题中也成立。这就是通过经验过的东西推断未曾经验过的东西，这是一个由特殊到一般的思维过程。如前所述，这是构建数学命题的关键。

如果用 V、F、E 分别表示三角形个数、顶点个数、边个数，那么由上面数值计算的结果可以猜想一般关系为 $V+F=E+1$，记为公式（3）。

与（1）比较，可以看到这个公式是空间欧拉公式的变形，可以称为平面欧拉公式。有了公式的符号表达，就可以用数学归纳法证明平面欧拉公式。

通过上面的讨论，实验过程或者说经验过程都经历了三个步骤：化简问题，实验尝试；探索规律，符号表达；还原问题，得到规律。事实上，这三个步骤就是构建数学命题的思维模式。可以看到，虽然这样构建命题得到的结论不一定是正确的，命题的正确性还需要通过演绎推理进行验证，但在大多数情况下，这样的思维模式是创造新的数学命题的必由之路，即便是对理解一个已知命题，这样的思维模式也能为证明命题提供思路。

四、数学模型构建的思维方式

在数学教学活动中，让学生了解数学模型，特别是了解数学模型的构建过程是非常重要的，因为在这个过程中，可以让学生体会：如何用数学的“眼睛”观察现实世界，如何用数学的“思维”思考现实世界，如何用数学的“语言”描述现实世界。

以下以急刹车距离模型为例①，说明数学模型“三次转化”的思维方式。

第一步，简约阶段，科学分析，提出假设，将现实问题转化为科学问题。一辆汽车急刹车所需要的距离，交通安全管理非常重要，急刹车的距离既与驾驶员的反应时间有关，也与刹车前汽车的行驶速度有关。如果排除道路状况、天气状况等随机因素影响，我们只考虑平均状态下的情况，用科学语言表达为：停车距离 ＝ 反应距离 ＋ 刹车距离。

第二步，表达阶段，科学表示，建立模型，将科学问题转化为数学表达。如果用 d 表示停车距离、用 d_1 表示反应距离、用 d_2 表示刹车距离，那么可将上述科学语言用数学语言表达为 $d=d_1+d_2$，记为公式（4）。

首先考虑反应距离。假设反应距离只是反应时间和汽车速度的函数，其中，反应时间是指司机意识到应当急刹车到实施急刹车所需要的时间，汽车速度是指司机在实施急刹车之前汽车的速度。

① 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 年版）[S]. 北京：人民教育出版社，2018：116-119.

在一般情况下，反应距离d_1与反应时间 t 和汽车速度 v 都成正比，因此可以把这个关系表示为$d_1=\alpha t v$，其中 $\alpha>0$ 为待定系数，简化为$d_1=\alpha v$，记为公式（5）。这样处理，可以认为是用 a 代替了 at。

这主要有两方面原因：一方面，反应时间 t 的具体数值很难确定；另一方面，无法建立公式计算待定系数中 α 的值，舍去 t 反而会更加准确。

其次考虑刹车距离。排除道路状况、天气状况等随机因素的影响，还需要假设汽车的刹车系统和轮胎完好，这样，刹车距离就是刹车受力与汽车速度的函数。对于刹车受力，假定一次刹车就把轮胎抱死，于是刹车受力大小基本上就是汽车轮胎与路面的摩擦力。如果用 F 表示刹车受力，那么基于上面的假设，汽车急刹车时所做的功为 Fd_2。根据能量守恒定律，可以得到 $Fd_2=\frac{mv^2}{2}$，其中 m 是车的质量，v 依然为汽车速度。如果急刹车时加速度是 α，根据牛顿第二定律，$F=m\alpha$，综合上面两个式子，可以得到函数关系 $m\alpha d_2=\frac{mv^2}{2}$，于是得到刹车距离为$d_2=\frac{v^2}{2\alpha}$。最后一个表达式意味着，刹车距离与汽车速度的平方成正比，同理，可以把这个表示式化简为$d_2=\beta v^2$，记为公式（6）。其中 β 为待定系数，蕴含了刹车加速度、道路摩擦系数等许多很难确定的数值。这样综合（5）和（6）就可以给出模型（4）的数学表达式：$d=\alpha v+\beta v^2$，记为公式（7），其中 α 和 β 均为待定系数。

在一般情况下，现实数学模型的待定系数不可能通过理论计算得到，这是因为在构建模型的过程中有许多因素不可能考虑清楚，于是把这些因素的影响都融入待定系数之中，这样，即便我们建立的是确定性的数学模型，仍然需要用统计学的方法估计模型中的待定系数。

第三步，应用阶段，检验改进，模型解释，将模型求解转化为解释或预测现实问题。对于我们现在研究的问题，可以使用表 1 中的数据，这是某公路局通过试验观察到的反应距离、刹车距离的数据，是对轿车试验得到的平均结果，一共有 13 组数据。① 基于这些数据，利用（5）式和（6）式，可以分别计算出 13 个 α 和 β 的值。分别计算这 13 个值的平均数，然后用平均数估计未知参数，得到 $\alpha=0.208$，$\beta=0.006$。这样，就得到急刹车停车距离模型：$d=0.208v+0.006\,v^2$。

表 1

$v/(\mathrm{km\cdot h^{-1}})$	d_1/m	d_2/m	d/m	α	β
32	6.7	6.1	12.8	0.208	0.005 9
40	8.5	8.5	17.0	0.212	0.005 3
48	10.1	12.3	22.4	0.208	0.005 3
56	11.9	16.0	27.9	0.211	0.005 0
64	13.4	21.9	31	0.208	0.005 3
72	15.2	28.2	43.4	0.211	0.005 4
80	16.7	36.0	52.7	0.208	0.005 6
89	18.6	45.3	63.9	0.210	0.005 8
97	20.1	53	75.6	0.208	0.006 0

① 原始数据的距离单位是英里和英尺，通过计算得到的参数 α 和 β 的估计值分别为 1.1 和 0.054。为了便于理解和增加适用性，此处把距离单位换算为千米和米，因此相应的估计值也发生了变化。

105	21.9	67.2	89.1	0.210	0.006 1
113	23.5	81.0	104.5	0.208	0.006 4
121	25.3	96.9	122.2	0.210	0.006 7
128	26.8	114.6	141.4	0.208	0.006 9

构建模型是为了解释现实。模型中的参数是至关重要的，因为参数决定了模型的适用范围。一般来说，现实生活中数学模型的参数不可能通过理论计算得到，因为在构建模型的过程中有许多因素没有，也不可能考虑清楚。因此，在现实模型中，参数值通常是通过统计方法得到的，也就是说，是通过现实数据估计出来的。大体有三种方法可以得到现实数据：调查、实验和试验。模型（8）中参数的估计来源于实际测量，因此在一般情况下，这个模型能够经受实践的检验。正因为如此，这个模型普遍应用于汽车刹车设计和路面交通管理。通过上面的分析可以看到，构建数学模型远远要比通常所说的数学应用复杂得多，可以精简很多因素。如果纯粹从数学角度思考似乎是不可以的，因为这样的精简必将影响表达式对客观现实的描述，我们只用数学的语言刻画物体运动的规律，而不是探究物体运动的原因。因此，数学模型只需要表达重要变量的关系或规律，并且，基于现实数据估计得到其中参数的值。

通过上面的实例，我们已经感悟到了数学模型“三次转化”的建构过程，其核心在于用数学的语言描述现实世界中的故事。这些故事只有通过数学语言的描述才可能清晰，只有通过数学语言的描述才可能引发人们深入思考。于是，在自然界错综复杂的各种现象面前，数学模型充分展示了数学的功能：表达简洁、揭示本质。无论是对于自然界的问题，还是对于生活中的问题，提出数学模型都是非常重要的，因为只有通过数学模型，人们才可能清晰地刻画那些规律性的东西，才能认识清楚事物的本质。

五、建立数学模型的核心特征

构建数学模型是一个动态的过程，是一个逐渐接近客观规律的过程。通过模型，搭建数学与现实世界的桥梁，使得数学回归现实世界。在建立模型的过程中，离不开抽象和推理，因此，构建模型的思维特征是简约和想象。

（一）简约是基于现实与逻辑的抽象

模型都要简化，剥离不必要的细节，即抽象掉若干现实世界中的因素，因此简约现实背景是构建数学模型的要点，是构建数学模型的抽象思维的核心。

判断生活中数学模型的基本依据是对事实的观察，以及观察基础上的演绎推理。构建自然界数学模型的前提之所以可以是假设，或者说是假说，是因为相信这些变量之间的关系是确切的，通过模型描述的是变量之间的必然联系。构建模型的前提更多地表现为对模型背景本身的抽象，或者说是对模型背景要素的提炼。构建数学模型时所追求的合理性并不要求关系之间的必然联系，而体现的是变量关系的或然性。① 因此，判断一个数学模型是否重要，并不取决于其数学表达是否复杂，而取决于它是否能够客观地反映事物发展的规律。建立数学模型必须关注两件事情：一是要充分了解事物的背景，抽象出最重要的变量，把握事物变化的本质和关系；二是要合理解释模型所表述的变化规律、变量之间的关系，以及模型中系数的意义。

① 史宁中. 数学基本思想18讲［M］. 北京：北京师范大学出版社，2016：270.

构建数学模型是对现实背景本身进行抽象，把握事物关于数量或者图形的本质，把繁杂问题简单化，给予清晰表达；去掉具体内容，利用符号和关系术语，表述已经简约化了的事物。传统的科学研究，可以从观察结果中归纳出结论，通过现象归纳模型、通过演绎描述模型、通过现象验证模型，有逻辑地得到研究对象的性质，以及描述研究对象之间关系的命题和计算结果，促进数学内部的发展。通过模型，人们用数学所创造的语言、符号和方法来描述现实世界中的故事，其思维特征是逻辑推理能力强，是归纳与演绎的有机融合，因此不同阶段有不同的进阶表现。而数学模型或者数学模式，就是创设合适教学情境的基础，是用数学的语言讲故事的源泉，在逻辑世界中构建一个抽象系统，这个抽象系统是真实世界里复杂系统的简化。

（二）想象是实践经验与思维经验的复合

我们知道，模型的最初建立是基于观察和想象的，而不是基于推理的；判断模型正确与否的标准是基于经验的，因此数学建模在本质上是活动经验的积累，可以是思维活动经验的积累，也可以是实践活动经验的积累。学生在不同阶段积累不同的活动经验，从经历过的东西推断未曾经验过的东西，除却简约现实背景外，还需要非凡的想象力。通过假设和推理，想象出结论，建立法则、模式和模型，在一般意义上描述一类事物的特征或规律。模型都是形式化的，是在相应的情境中进行逻辑推理、提出假说、设计解决方案和拟合数据，通常要给出精确的定义。通过简化和精确化，使用数学公式，创建能够以符合逻辑的方式进行思考的结构。从事物的过去和现在推断事物的未来，既能够从条件推断结果，也能从结果探究成因。这是一种创造性思维模式，思想的感悟和经验的积累是一种隐性的东西。依赖学生亲自参与其中的数学活动，依赖学生独立思考，这是一种过程的教育和智慧的教育，是建模过程动态的经验特征。① 因此，构建数学模型既要突出各阶段建模不同能力的培养和活动经验的积累，又要培养学生的想象力，这才更有利于数学模型素养的培养。

（责任编辑　李　冰）

On the Way of Thinking of Pattern and Model Construction in Mathematics Education

Shi Ningzhong

Abstract: In the era of big data, pattern and model have become a hot issue in mathematics education. It is very important to discuss the concepts of pattern and model, their relationship and how to construct their thinking paradigm. Pattern is the origin of mathematical model and model tells the story of the real world in mathematical language. Mathematical concepts have experienced two abstractions of reality and logic, the construction of propositional pattern needs to go through three stages, and the construction of mathematical model needs "three-orientation" thinking paradigm. Simplicity and imagination are the core thinking characteristics of mathematical model construction. Simplicity is abstraction based on reality and logic while magination is the combination of practical and thinking experience.

Key words: pattern; model; curriculum standards; way of thinking

About the author: Shi Ningzhong is a professor from School of Mathematics and Statistics of Northeast Normal University.

① 秦德生，郭民. 中小学数学建模素养进阶的表现期望研究［J］. 现代中小学教育，2021（10）：28-31.