

构建数学课程新样态， 推进高质量数学教育发展

史宁中，马云鹏，张 丹

摘要：新中国成立以来基础教育阶段数学教育经历不断改进和发展的过程，特别是进入新世纪以来数学课程的发展不断改革和创新。课程目标、课程结构、概念和方法的表达是数学课程乃至基础教育课程改革的核心要素。总结二十多年来数学课程，特别是小学数学课程的发展趋势，大体可以归结为：课程目标越来越明确，从“双基”“三大能力”到“四基”，再到核心素养“三会”，越来越彰显以人为本的教育理念；课程结构越来越清晰，从分散的单一的学习主题到四个学习领域的设置，再到领域下整合的七个主题，越来越体现知识结构与素养的融合；概念和方法的表达越来越科学，数学教材的表达以学习主题为线索，越来越关注学生对数学本质的认识和理解。数学课程的新样态推进数学学科实践的改进，促进高质量数学教育的发展。

关键词：数学课程；课程目标；课程结构；数学概念与方法

中图分类号：G623.5 **文献标识码：**A **文章编号：**1000-0186(2025)11-0004-10

新中国成立以来，数学课程与教学改革的历程是一个不断改进和发展的过程。特别是进入21世纪以来，在基础教育课程改革背景下，落实立德树人根本任务，贯彻学科育人理念，义务教育阶段数学课程不断改革和创新。全面审视新中国成立以来，从课程目标、课程结构、概念和方法的表达等核心要素梳理和总结其特征，有助于深刻理解新时代数学课程改革乃至基础教育课程改革的脉络、特征和发展趋势。

一、课程目标越来越明确

新中国成立以来，伴随着我国基础教育的发展，义务教育数学课程目标发生了很大的变化，总体趋势是目标越来越明确、越来越彰显以人为

本的教育理念。大体可分为两个阶段：第一个阶段从1952年到2005年；第二个阶段从2006年至今。在第一个阶段，影响较大的数学课程目标有以下三个。

一是“双基”。1952年3月教育部颁布的《中学暂行规程（草案）》提出中学教育四个目标，其中第一个目标就是“使学生能正确运用本国语文，得到现代科学的基础知识和技能，养成科学的世界观”^[1]。这是最早的对“基础知识和技能”的表述。1952年12月教育部颁布的《中学数学教学大纲（草案）》进一步强调，“中学数学教学的目的是教给学生以数学的基础知识，并培养他们应用这种知识来解决各种实际问题所必需的技能 and 熟练技巧”^{[2]355}。这样，从1952年开始，中

作者简介：史宁中，东北师范大学数学与统计学院教授（长春 130024）；马云鹏，东北师范大学教育学部教授（长春 130024）；张丹，北京教育科学研究院教授（北京 100036）。

国基础教育阶段的数学教育就逐渐形成了“双基”的特色，要求基础知识扎实和基本技能熟练。

二是“三大能力”。1963年5月教育部颁布的《全日制中学数学教学大纲（草案）》提出，“中学数学教学的目的是：使学生牢固地掌握代数、平面几何、立体几何、三角和平面解析几何的基础知识，培养学生正确而且迅速的计算能力、逻辑推理能力和空间想象能力，以适应参加生产劳动和进一步学习的需要”^{[2]434}。文件中五次出现这三个能力的要求，可见对这些能力的重视程度，这就是人们后来常说的数学的“三大能力”。

三是分析问题、解决问题的能力。1978年2月教育部颁布的《全日制中学暂行工作条例（试行草案）》提出，“使学生在小学教育的基础上，进一步掌握语文、数学、外国语等课程的基础知识和基本技能，逐步具有自学能力和分析问题、解决问题的能力，具有一定的生产知识”^[3]。教育部1978年颁布的《全日制十年制学校中学数学教学大纲（试行草案）》再次提出，“中学数学教学的目的是：使学生切实学好参加社会主义革命和建设，以及学习现代科学技术所必需的数学基础知识；具有正确迅速的运算能力、一定的逻辑思维能力和一定的空间想象能力，从而逐步培养学生分析问题和解决问题的能力”^{[2]453}。其中，第一次把计算能力拓展为运算能力。这样，到20世纪末我国义务教育数学课程目标大体表述为“基础知识、基本技能”“正确迅速的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力”和“分析问题、解决问题的能力”。

上述三个目标是一脉相承的，汇聚了我国传统数学教育的特色，也是优势，这就是：强调基础知识和技能，强调计算和证明，强调分析问题和解决问题的能力，在本质上强调的是基本功的训练、是熟能生巧。虽然从1978年到2005年，无论教育理念还是教学方式都发生了很大的变化，但传统的教育教学目标没有发生根本性变化。也就是说，半个多世纪以来，中国基础教育重视培养学生的基础知识和基本技能，重视培养学生分析问题和解决问题的能力，但培养学生的创造精神和创新能力不够。

世纪之交，为贯彻《中共中央 国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》和《国

务院关于基础教育改革与发展的决定》，教育部决定大力推进基础教育课程改革。2001年颁发的《基础教育课程改革纲要（试行）》产生了很大的影响，使中国的基础教育从理论到实践都发生了很大变化，强调要“改变课程过于注重知识传授的倾向”，明确提出“应体现国家对不同阶段的学生在知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观等方面的基本要求”，也就是三维目标的要求。同年颁布的《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》（以下简称“2001年版课标实验稿”）提出，使学生“获得适应未来社会生活和进一步发展所必需的重要数学知识（包括数学事实、数学活动经验）以及基本的数学思想方法和必要的应用技能；初步学会运用数学的思维方式去观察、分析现实社会”^[4]的课程目标，对传统的以知识技能为核心的课程目标有所突破。

但是，因为2001年版课标实验稿以及相应的教材存在一些问题，引发了社会、数学教育界甚至数学界的广泛关注，有些批评还是比较激烈的。于是在2005年春，教育部决定先于其他学科专门成立2001年版课标实验稿的修订小组。修订小组由14人组成，其中有6位数学教授、5位数学教育教授、1位数学教研员和2位中学数学教师。事实证明，修订小组的成立，对我国基础教育阶段数学教育的发展起到了至关重要的作用。修订小组把数学课程目标由传统的“双基”拓展为“四基”，即在“基础知识、基本技能”的基础上增加“基本思想、基本活动经验”；由“两能”拓展为“四能”，即在“分析问题、解决问题”能力的基础上增加“发现问题、提出问题”的能力。这样的拓展，使得我国数学课程目标得到了极大的提升。这是课程目标的第二阶段。下面，仅就“基本思想”和“基本活动经验”作简要分析。

数学基本思想的判断，遵循两个基本原则：一是数学产生和发展所必须依赖的思想；二是学习过数学的人应当具有的基本思维特征。^{[5]绪言}可以看到，第一个原则是指向数学的，第二个原则是指向数学教育的。只有把这两个指向统一，才可能构建数学课程目标。修订组最终把数学的基本思想落实到三个方面——抽象、推理、模型，这三者分别涉及数学的产生、发展和应用，大体

描述如下。

数学的产生源于数学的抽象，数学的研究对象以及描述研究对象性质、关系和规律的数学术语都是抽象的东西，这些抽象的东西来源于现实世界，来源于人的经验，是人抽象出来的。数学的抽象就是舍去承载物的一切现实背景，也就是舍去承载物的一切物理属性。数学的发展源于数学的推理，推理是从命题判断到命题判断的思维过程。数学的推理是依据规则进行的，大体分为两类：一类是基于思辨的，从设立的前提命题出发，依据传递性的原则，使命题的结论得到确认，称为演绎推理；另一类是基于综合的，从经历过的事实出发，依据传递性的原则，使命题的结论得到拓展，称为归纳推理。数学发展的真正动力来自数学的应用，只有那些直接从现实世界中抽象出来的数学问题，才是最本质的，才具有顽强的生命力。数学模型就是理性加工形成的数学语言，特别是在大数据时代的今天，基于大模型的人工智能自然语言处理系统，为数学模型的发展提供了不可估量的前景。

数学基本活动经验并不是泛指一般的学习活动经验，诸如经历、体验、探索等，而是指学生通过学习活动最终获得的经验，主要是指会想问题、会做事情的经验，获得的过程可能是长时间的、潜移默化的。为了经验的教育从来也没有被列入我国的传统数学教学目标，为此，《义务教育数学课程标准（2011年版）解读》的绪论中是这样表达的：“思想的感悟和经验的积累是一种隐性的东西，但恰恰就是这种隐性的东西在很大程度上影响人的思想方法，因此，对学生，特别是对那些未来不从事数学工作的学生的重要性是不言而喻的，这是学生数学素养的集中体现，也是‘育人为本’教育理念在数学学科的具体体现……显然，思想的感悟和经验的积累仅仅依赖教师的讲授是不行的，更主要的是依赖学生亲自参与其中的数学活动，依赖学生的独立思考，这是一种过程的教育。”^[6]因此，这里所说的“过程

的教育”，并不是指数学知识产生的过程，而是学生自己理解数学知识和应用数学知识的过程，包括思维的过程，也包括做事的过程，通过这样的过程积累经验。

这样，到了《义务教育数学课程标准（2011年版）》（以下简称“2011年版课标”）全面修订的时候，数学学科的课程目标已经相对成熟了，既包括“四基”“四能”，也包括“数感”“符号意识”等与数学素养有关的十个核心词。

2011年版课标颁布以后，经历了《普通高中数学课程标准（2017年版）》（以下简称“2017年版高中课标”），直到《义务教育数学课程标准（2022年版）》（以下简称“2022年版课标”），数学课程目标再次发生了变化，主要表现在两个方面：一方面来自数学外部，这就是把核心素养作为统一的课程目标，作为育人价值的集中体现，核心素养是在学生理解掌握知识技能的基础上，在学习过程中逐步形成的正确价值观、必备品格和关键能力；另一方面来自数学内部，这就是更加关注数学最终形成的抽象结构，这样的抽象结构可以表述为“研究对象+”的思维模式^①，其中的“+”是与研究对象有关的性质、运算、关系等。在这一部分，我们集中讨论来自数学外部即核心素养所带来的变化，下一部分将集中讨论源于数学课程内部的变化。

如果把核心素养作为课程目标的统领，那么核心素养就应当具有三个特性：一是一致性，是每个学习过数学的人都应当具有的，但又是终极的；二是阶段性，不同的学习阶段有不同的表现，涉及知识储备、身心发展、经验积累；三是整体性，不仅有传统意义的数学特征，还要有数学教育的特征，不仅能够表述学科思维，而且能够表述认知心理。

这样，未来的数学课程目标，就数学素养而言，不仅涉及小学和初中，还会涉及高中、大学，甚至还会涉及研究生教育，因此体现了一致性；但每个学习阶段有各自的表现，体现了阶段

^① 在本质上，这个想法来自希尔伯特（Hilbert），因为他曾说：“欧几里得关于点、直线和平面的定义，在数学上其实并不重要。它们成为讨论的中心，仅仅是由于它们同所选择的诸公理的关系。换句话说，不论是管它们叫点、线、面还是桌子、椅子、啤酒杯，它们都能成为这样一种对象：对它们而言，公理所表述的关系都成立。”（参见：瑞德·希尔伯特：数学世界的亚历山大 [M]，袁向东，李文林，译。上海：上海科学技术出版社，2001：61。）后来，布尔巴基学派把这样的思想拓展为基于数学研究的抽象结构，即“集合+”的形式。2022年版课标把这样的思想拓展为基于数学教育的“研究对象+”的形式。

性；重要的是，要关注数学知识的递增逻辑，更要关注学生的认知特征。因此，用“三会”统领未来数学的课程目标：会用数学的眼光观察现实世界；会用数学的思维思考现实世界；会用数学的语言表达现实世界。可以理解，数学的眼光比数学抽象更加上位，数学为人们提供了一种认识与探究现实世界的观察方式；数学的思维比数学推理更加上位，数学为人们提供了一种理解与解释现实世界的思考方式；数学的语言比数学模型更加上位，数学为人们提供了一种描述与交流现实世界的表达方式。

2022年版课标中数学课程的总目标，是在“三会”的统领下，学生获得“四基”“四能”“情感、态度、价值观”。显然，这样的总目标是对2011年版课标中课程目标的继承和发展。

二、课程结构越来越清晰

课程结构是课程内容组织的基本样态。基于课程目标选择的学习内容，需要以一种适当的方式加以组织，使教科书的编者和学校的教学有章可循。课程结构的形成既要依据学科逻辑和课程理论，又要基于教育教学实践经验的归纳和总结，正如泰勒（Tyler）所说，“为了使教育经验产生累积效应，就必须将它们组织起来，使之互相强化”^{[7]73-74}。

（一）数学课程结构的样态变化

新中国成立以后，我国基础教育阶段数学课程结构的样态大体可以分为三个阶段：第一阶段始于1952年，描述数学课程的文件是教学大纲，主要是具体教学内容的陈述；第二阶段始于2001年，用课程标准取代教学大纲，开始关注数学内容的结构和知识的进阶；第三阶段始于2022年，明确提出课程内容的结构化整合，关注数学内容的结构化，关注知识进阶与学生数学认知的融合，使学生在获得知识技能的同时，发展学习能力、提升核心素养。三个阶段课程结构的演变和特征大体如下。

第一阶段（1952—2000年）的学习主题基本上是分散的，主题的表达是数学内容的直接表述。比如，把运算表述为四则计算或四则运算（如第一部分所述，由计算到运算的转变是在1978年），其他还有几何的初步认识、代数的初

步认识、统计的初步认识等表述。这样的表述不涉及学习主题的本质，很难了解学习这些内容应当聚焦的核心内容或数学思想。这个阶段的前期，学习主题还包括一些与生产实践直接相关的内容，如简单的簿记、记账、土石方等，这与当时大部分小学毕业生直接参加生产劳动的国情有关；再比如，直到1963年，珠算都作为单独的一个学习主题。因此，课程结构即学习内容的组织与社会和科技的发展密切关联。

第二阶段（2001—2021年）开始设置学习领域，2001年版课标实验稿包括数与代数、空间与图形、统计与概率、实践与综合运用四个领域，包含14个学习主题（小学阶段）：数的认识，数的运算，常见的量，探索规律，式与方程，正比例、反比例，图形的认识，测量，图形与变换，图形与位置，数据统计活动初步，不确定现象，简单数据统计过程，可能性。2011年版课标仍然是四个领域，但把“空间与图形”修改为“图形与几何”，“实践与综合运用”修改为“综合与实践”，学习主题由14个减少为12个，主要是减少了统计与概率的两个主题。可以看到，四个学习领域的确定，在一定程度上建构了数学内容的结构，但主题的表达仍然以内容为主，比较分散，难以从整体性和一致性上把握学习内容与方法。

第三阶段（2022年至今）内容结构化、主题更加鲜明。2022年版课标保持了四个学习领域，但对领域下的主题进行了优化整合，把原来的12个主题整合为7个学习主题（小学阶段）：数与运算，数量关系，图形的认识与测量，图形的位置与运动，数据分类，数据的收集、整理与表达，随机现象发生的可能性。这样的主题变化更有利于清晰地表述学科本质，如“数与代数”领域把原有的7个学习主题修订为2个学习主题，即“数与运算”和“数量关系”，前者体现了“研究对象+”的形式，后者强调用符号（包括数）表达数量之间的关系和规律（参见第三部分的论述）；“图形与几何”基于“研究对象+”的理念，把原有的4个学习主题修改为2个学习主题；“统计与概率”领域不仅增加了数据分类的主题，而且强调了数据的收集、整理与表达，这完全是为了适应大数据分析和人工智能的时代

要求;“综合与实践”领域则第一次充实了具体的内容,后面将会进一步讨论这个话题。

上述三个阶段课程结构的变化体现了内容形式表述到学科本质表述的转变,有利于教材编写体现学习内容的整体性与一致性,有利于教师遵循数学内容的逻辑和学生学习的进阶,实现“基于主题的整体设计、立足单元的分步实施”的教学过程,最终指向学生学习过程中的迁移和内容体系的建构,促进核心素养的形成和发展。特别是第三阶段课程结构新样态的形成,使得课程结构的思路越来越合理、表达越来越清晰。

(二) 数学课程结构的主要特征

内容的选择是解决学什么的问题,内容的组织是解决以什么样的课程逻辑将学习内容呈现给学生的问題。这里所说的课程逻辑不仅有知识本身的逻辑,也包括学生认知的进阶。课程组织的原則包括连续性、顺序性和整合性。其中,连续性涉及在学习者的经验中反复强调特定的要素,顺序性是指提高学习者发展的广度和深度,而整合性是指提高学习者的行为和涉及的相关要素的统一性。这就意味着课程编制者需要依据对学习者的心理意义来考虑组织的原则。^{[7]73-75}

基于对课程组织原理的理解,充分考虑数学学科的逻辑系统和义务教育阶段学生的认知特征,2022年版课标对课程内容进行结构化整合,重新梳理了四个学习领域下的主题,包括相应的内容。这些主题表现了整体性、一致性和阶段性的特征。其中,整体性体现概念的抽象结构,即“研究对象+”的形式;一致性体现学科的逻辑结构;阶段性符合学生的认知结构。

首先,课程内容的整体性。整体性与人的数学认知有关。为了更好地认知数学的研究对象,就要同时认知对象的性质,或者关系,或者运算,等等,称为数学的抽象结构,原本是数学研究的基本样态^[8]。2022年版课标尝试将其应用于数学教育,这是形成“研究对象+”的思维基础。如数与运算,数是人们对现实世界数量的抽象,是学习和研究数学最重要的对象,但仅仅建立数的概念是不够的,为了更好地认知数,必须同时认知数的性质(如奇偶性、质数合数等)、数的关系(相等、小于、大于等)。显然,这些关系都与数的运算相关。为此,2022年版课标

将“数与运算”作为一个主题,使学生了解数与运算存在密切关联,数是运算的对象,数的表达、性质和关系都与运算直接相关。于是,数的认识、数的运算才具备一致性的认知特征。图形的认识与测量这个主题类似,图形的测量是针对具体图形展开的,虽然一维、二维、三维图形的测量需要选择不同的度量单位,但通过一体化的学习可以感知度量的核心是线段的长度、基于长度认识面积、基于面积认识体积。然后,把标准图形的度量拓展到一般图形的度量,比如,把长方形的面积公式拓展到平行四边形的面积公式,进而拓展到三角形的面积公式。因此,从整体上把握图形的认识与测量是必要的。

其次,课程内容的一致性。数学学科具有很强的逻辑性和系统性,因此,数学教育应当引导学生建立系统的学科结构,通过一致性体现主题下学习内容的连贯性,凸显本质一致的内容之间的关联。比如,关于数的运算,起始于自然数的加法,减法是加法的逆运算,乘法是特殊情况下的加法的简便运算,除法是乘法的逆运算。所有自然数的乘法都可以化归于表内乘法,这是因为算律决定算理、算理决定算法(参见第三部分)。虽然分数和小数的表达方式与自然数不尽相同,但是,如果整数的单位定义为计数单位,把分数单位和小数单位也都看作计数单位,那么可以得出运算一致性的观念,形成学习运算的基本思路,即数的运算是基于计数单位个数的运算。类似得到度量的一致性,对于图形的长度、面积、体积都是确定一个合适的度量单位,然后采用一个合适的方法计算度量单位的个数,比如,利用乘法得到长方形面积公式,通过割补转换等方法进行面积计算的拓展。主题学习内容的一致性,也为学习过程中的迁移提供条件,比如,把整数的加减运算“在相同数位上进行”这个法则迁移到小数的加减运算,然后理解分数的加减运算要进行通分也就顺理成章了。事实上,2022年版课标设定的每个学习主题都蕴含了一致性,都可以帮助学生从内容之间的关联、内容的性质或者运算理解所学的内容,引导学生在学习的过程中感悟知识与方法的迁移,自主建立学习内容的结构,在学习的过程中学会学习。

再次,课程内容的阶段性。阶段性考虑学生

的学习水平和思维发展特征,根据学生认知能力的发展设计学习内容的进阶。基于学习主题的一致性,可以把学习内容的总目标分解为不同的阶段,使学习内容设计体现连贯的阶段性。为此,2022年版课标将小学原来的两个学段改为三个学段,反映学生不同阶段的认知特点,凸显课程内容的阶段性。为了得到小学数学的合理学段,有关研究对小学生数学概念和数学方法的认知水平的差异进行了分析。利用仅与思维有关、与学习知识无关的问题测试学生,根据学生回答对其水平进行分类,例如:一个袋子装有大小相同的红色和绿色的橡皮擦,其中红色的橡皮擦多于绿色的。从袋中任意取一个,问最有可能的颜色是红色的还是绿色的。^{[9]101} 结果发现,学过统计的一、二年级的学生对统计的理解水平几乎接近,三年级的学生对统计的理解水平明显高于一、二年级的学生。^{[9]84} 有关小学数学学段的研究也发现,在数学抽象方面,小学一、二年级学生差异不明显,二、三年级学生差异明显,四、五年级学生差异不明显,五、六年级学生差异明显。^[10]

正是依据上述理由,2022年版课标在关注学习主题内容和方法一致性的基础上,重视内容和方法呈现方式的阶段性。比如数的认识,虽然都是围绕计数单位展开,但不同阶段的呈现方式不尽相同:第一学段,通过“10的认识”与“1到9的认识”的区分,感悟计数单位“十”,通过 $9999+1$ 认识1万这个数;第二学段,通过10个千再次认知计数单位“万”和万以上的数,初步认识分数和小数;第三学段,通过分数和小数的运算,一般性地理解计数单位。再比如整数的乘法运算,虽然随着数位的增加计算难度不断提升,但基本的算理是一致的,因此,学生掌握了2位数乘2位数的算理,就可以尝试用类比的方法,自己计算3位数乘2位数,实践证明这样的方法是切实可行的。让学生自己得到结论,是培养学生创新精神和创新能力的必由之路。整数乘法的本质是数字乘数字^①、计数单位乘计数单位,这样的方法可以拓展到小数和分数,比如, 0.3×0.2 是3个0.1乘2个0.1, $3/5 \times 2/5$ 是3个 $1/5$ 乘2个 $1/5$,算式可以分别写成 $3 \times 2 \times$

(0.1×0.1) 和 $3 \times 2 \times (1/5 \times 1/5)$ 。到了六年级总复习阶段,可以引导学生总结这样的一致性。

最后,综合与实践领域的结构化改造。这个学习领域从2001年版课标实验稿开始设置,旨在培养学生运用数学的知识方法解决实际问题的能力,但是,直到2011年版课标都没有赋予具体的内容。在课程整合的理念下,2022年版课标为综合与实践领域设计了具体的内容,基本原则是学习那些数学学科以外的知识,即与抽象的数以及长度无关的那些知识。主要有两类学习形式:一类是主题的形式;另一类是项目的形式。主题形式包括用时间单位、质量单位和货币单位等表述的那些常见的量,以及位置关系、平面方向等常识性的知识等。项目形式是在真实情境中用数学和其他学科的知识方法解决真实问题,希望学生像完成项目那样,经历一个从问题的提出开始,经历问题解决路径的设计,到问题结论验证的全过程,促进应用意识和创新意识的形成。小学阶段以主题形式为主,在第三学段开展一些项目学习;初中阶段以项目形式为主。

(三) 对教材的要求和对教学的启示

数学课程结构分为领域和主题两个层次,主要是基于主题展开的,主题的设定体现了整体性,主题内容的呈现则需要体现一致性和阶段性。2022年版课标对每一个学习领域进行整体述说后,就对这个领域各个学段的主题提出内容要求、学业要求和教学提示,呈现的形式是基于学段的、整体的。这样,相应的教材的设计应当是单元的、进阶的,也就是,首先明晰每一个主题知识的主线以及最终达成的学业要求,然后根据课程目标的要求,把这些知识分解为每个单元的表现。这里所说的表现不仅包括知识,也包括知识的呈现和表述,还包括相应数学核心素养的达成,体现课程结构的一致性和阶段性,使得教材对于每一个主题的知识都能形成一个完整的、相互关联的整体,最后协调主题之间、领域之间的关系。这样的课程设计,有利于教师进行“基于主题的整体设计、立足单元的分步实施”的教学活动,有助于学生循序渐进、最终整体理解所学的知识和方法。

① 这里所说的数字是指计数单位的个数。

比如,基于小学阶段“数与运算”主题的课程结构,以及学生认知能力和抽象思维的不同层次,设计三个学段的教学。

第一学段,利用现实背景认识数,借助实际意义知道数的运算。通过具体的形式让学生感悟数学的本质。比如,通过10的再认识等,理解数位,感知数学的表达;知道减法与加法、乘法与加法、除法与乘法的关系。

第二学段,感知横式与竖式的关联,知道算律决定算理、算理决定算法。通过现实问题,知道分数、小数是比整数更精细的表达,理解整数、小数、分数之间的关系,感知计数单位;通过整数、小数、分数的运算,感知数运算与计数单位之间的关系。

第三学段,知道数认识的一致性和数运算的一致性。知道数是多少个计数单位的表达,知道数运算与计数单位之间的关系,理解分数通分、小数点对齐的道理。理解除法与整数、分数与小数、几分之几与几倍、比与比例之间的关系;知道逆运算的表达,理解四则运算之间的关系。

这样,数学教学就必须体现数学课程结构的特征,基于主题整体设计、分步实施。所谓整体设计,是有组织地以教学研究的形式展开,课标为指引、教科书为载体,明晰每一个学习主题的主线和阶段性表现,使每一位教师都清楚自己所要教学的内容在整体中的位置和前后联系;所谓分步实施,是说教师要根据主题内容整体设计的基本思路,具体设计所要教学的内容和相应的教学活动,使得数学知识技能的教学,特别是数学基本思想和基本活动经验的积累具有一致性和阶段性,形成和发展数学核心素养。

在具体的教学活动中,课程结构化有利于促进学习迁移。学生的学习往往体现由简单到复杂、由现有内容拓展到新内容的发展过程,称这样的过程为学习迁移,是学习心理学的基本规律之一。经验表明,小学数学学习迁移的主要思维形式是类比。关注学习迁移是使学习真正发生的有效手段,有利于学生养成发现问题和提出问题的习惯。因为关联密切的内容和方法的有效组织

是引发学习迁移的基本条件,所以课程内容结构化为实现学习迁移的教学活动提供了必要条件。比如上述第二学段的教学设计,可以让学生用类比的方法,把两位数的乘法拓展到更多位数的乘法;第三学段的教学设计,可以让学生感知如何把整数的运算形式拓展到分数和小数的运算。

无论如何,对于如何理解和实践数学课程结构的一致性和阶段性,还需要更加严谨的课程理论、更加富有成效且准确表达的教学实践。

三、概念与方法的表达越来越科学

随着课程目标的逐步明确和课程结构的日益清晰,小学数学课程中概念与方法的表达越来越科学,也就是越来越触及数学知识的本质特征,越来越契合学习者的认知规律。遵循这样的变化,相应的小学数学教材不仅着眼于数学内容的合理进阶,也致力于学生认知水平的稳步提升;不仅关注学生对数学知识的理解掌握,也关注学生数学素养的持续发展。

(一) 关于数与运算的表达

基于现实背景认识数,基于实际意义理解数的运算,这是每一个初学者必须经历的学习过程。但是,传统的小学数学教育,把学习目标过度集中于计算能力的培养^①,缺少概念抽象的过程,以及概念抽象基础上的对于数和运算本质的理解。因此,数的认识没有强调计数单位,数的运算没有重视算理^②,最终导致:学生对数的认识各有各的背景,只知道整数、分数、小数的区别,不知道这些数的共性;数的运算各讲各的道理,比如,分数的除法强调通过等分除和包含除表述除法的意义,小数的除法则强调通过商不变转化为除数是整数的除法。基于这样的教学,学生很难真正理解数的概念和运算方法,很难感悟数学的一般性。

事实上,自然数是对数量的抽象,数量的本质是多与少,与此对应,自然数的本质是大与小,基于这样的本质,加法对应大,减法对应小,减法是加法的逆运算;乘法是加法的简便运算;除法是乘法的逆运算。人们基于计数单位表

^① 如第一部分所述,传统数学教育强调“三大能力”的第一个能力就是培养学生正确且迅速的计算能力。

^② 过去的教材过分强调竖式,忽略甚至不出现横式,但在事实上,横式述说的是算理,竖式述说的是算法。

达十进制的自然数^①，如果用计数单位统领数的表达，虽然计数单位的形式有所不同，但整数、分数和小数都是“多少个计数单位”的表达，因此是一致的。基于这样的表达，数的加减运算要在相同的计数单位上进行，乘法运算可以理解为计数单位与计数单位相乘得到新的计数单位，计数单位的个数与计数单位的个数相乘得到新的计数单位的个数，因此，数运算的本质是一致的。近些年来的教学实践表明，借助计数单位表达和理解数可以让学生感悟数学的本质，能够更好地理解和掌握数的运算。^[11]

小学生对于数的认识应当经历两个阶段，这就是：由感性具体到感性一般，从感性一般到理性具体。比如，用两个小方块（感性一般）表达两个苹果、两个桃子（感性具体）数量的认知过程，两个小方块在形式上是舍去了具体物的称谓，实质上舍去了事物的背景，只留下与数学有关的数量，经历这个过程可以让学生感悟抽象的本质；然后，用数字2表达两个小方块，这是从感性一般到理性具体的认知过程，进一步舍去事物的背景，得到了数学的一般性表达^②。

基于“研究对象+”的抽象结构，在认识数的同时引入数的运算是相得益彰。如前所述，数的本质是大与小，加法对应大，减法对应小，这样就可以引导学生通过运算的意义，理解四种运算之间的关系；通过竖式与横式的比较，即算法和算理的比较，理解算律决定算理、算理决定算法的道理。学习迁移对于运算方法的学习是极为有效的，这就是从未知到已知的认知过程，然后通过说理的方式让学生感悟数学运算的本质，理解计数单位在数的认识和运算中的作用，最终引导学生感悟数概念本质上的一致性、数运算本质上的一致性。

这样，基于相对合理的课程结构，使得与数有关的概念的表述、与运算有关的方法的表达更加科学，使得在小学数学教育中，知识进阶与学生认知进阶得到统一，便于实施“基于主题的整体设计、立足单元的分步实施”的教学活动，这也正是2022年版课标所提倡的。

（二）关于数量关系的表达

直至2000年的数学教学大纲，数学课程都把应用题作为一个学习领域，因此在传统的小学数学中，学习数量关系主要是为了解应用题，教学强调解题套路，甚至许多素材的选用会脱离现实背景。虽然2001年版课标实验稿取消了应用题的领域，把这样的内容与数的运算整合，但导致内容相对零散，很难体现知识的本质特征。比如，用字母表示数量关系是算术拓展为代数的关键，但相应教材“主要是在简易方程中用字母表示未知数，这还停留在古希腊丢番图的表达层面，依然是算术”^[12]，基于这样的教学，学生难以感受方程引入的必要性。同时，相对零散的内容，使学生很难整体把握估算、探索规律、比和比例等内容，很难感知知识之间的关联。

2022年版课标将这些内容整合到数量关系这个主题中。所谓数量关系，“主要是用符号（包括数）或含有符号的式子表达数量之间的关系或规律”^{[13]18}；涉及两个对象数量之间的关系，或者一个对象在不同时间数量之间的关系，其中的数量可以是具体的数值，也可以是符号表达的一般的数量。显然，这样的数量关系包含用一个字母表达未知数的方程，也包含用两个字母表达的函数，形成小学、初中、高中乃至大学数学最为重要的学习内容，当然，每个阶段的学习内容有所侧重、学习目标循序渐进。这样的内容整合，充分体现了数学课程的一致性和阶段性。

基于学生的认知进阶，对于小学的三个学段，可以展现如下的学习进阶。第一学段，运用四则运算的意义解决实际问题，感悟加法模型和乘法模型；第二学段，在真实情境中发现数量关系，尝试用数学的语言表达这样的关系，经历建立加法模型和乘法模型的过程；第三学段，探索用字母表示数学的以及现实情境中的关系、性质和规律，感悟字母可以像数一样进行计算和推理，得到的结论具有一般性。

总之，传统数学教材中的利用数和运算解决问题、估算、常见数量关系、字母表示数、探索

^① 计数单位是表达数量多少和数序的计量单位。2022年版课标明确要求认识计数单位。

^② 高中数学将要学习集合，实现理性具体到理性一般的认知过程，因为集合的元素可以是数，也可以是图形、方程式，甚至可以是一般的字母。

规律等内容,本质上都属于数量关系。因此,“从数量关系的视角理解和把握这些内容的教学,有助于从整体上认识这些内容的核心概念”^[14]。

(三) 关于图形与几何的表达

在传统的数学教材中,几何的内容大多表述为几何的初步认识,导致几何知识的表述相对零散、不能很好地反映学科本质。比如图形的认识,没有体现图形抽象的过程,缺乏发展学生空间观念、几何直观的素材;图形测量的内容主要是基于公式的计算,没有体现度量的思想,更没有借助度量更加深刻地认识图形和其他几何学的研究对象。

2011年版课标将几何的内容整合为四个主题,2022年版课标进一步整合为两个主题,这两个主题是“图形的认识与测量”“图形的位置与运动”,充分展示了“研究对象+”的课程结构。在小学阶段,“图形的认识主要是对图形的抽象”^{[13]27},抽象的过程就是把日常生活中即三维空间中物体的外部形象,用线条描绘在二维平面上^[15];几何学主要研究图形的性质以及图形之间的关系^{[5]88};研究的基础是图形的测量,重点是确定图形的大小,原则是统一度量单位。因此,这些内容的有机整合可以形成一个完整的认知结构,把图形的认识与测量作为一个学习主题,有利于学生形成并掌握关于图形的完整知识。

相应的教学,要引导学生体验立体形状到平面图形的抽象过程,在这个过程中发现并探索图形的特征,认识点、线、面、角等几何基本要素,逐渐形成概念;与此同时,学习图形的测量,一方面可以引导学生从量化的角度进一步认识图形,另一方面可以培养学生的动手能力,形成和发展量感,知道度量的本质是确定一个合适的度量单位,与数的表达类似,长度、面积、体积的度量就是表达为有多少个度量单位。在此基础上,就可以顺理成章地得到标准图形度量的计算公式,并且结合图形的特征,把计算公式拓展到一般图形大小的计算。比如,学习了长度的计算之后,可以尝试拓展到面积的计算甚至拓展到体积的计算,感知虽然度量的对象不同,但度量

的方法在本质上是一致的。

图形的位置与图形的运动具有本质的关联,是几何研究的重要内容。在基础教育阶段,主要学习平移、旋转和轴对称这三种运动形式,然后用数学的语言即图形变换表述图形运动,最终证明刚体变换是这三种变换的共性。小学阶段让学生感知这样的运动,初中阶段逐渐用日常生活的语言表述运动的特征、给出这三种运动的定义,高中必修课通过坐标的变化即图形变换述说图形运动,高中选修课进一步用矩阵的语言定义并借助矩阵证明这三种变化都属于刚体变换。显然,与数量关系一样,这样的整合充分体现了数学课程的一致性和阶段性。

(四) 关于数据分析与随机性的表达

2001年版课标实验稿首次将“统计与概率”作为一个学习领域;2011年版课标提出了数据分析观念,凸显数据分析是统计学的核心;2022年版课标则将“数据意识”纳入数学核心素养“三会”在小学阶段的主要表现之一,明确数据意识是指对数据的意义和随机性的感悟。^{[13]9}数据的整理与表达是数据分析的基础,在大数据时代,数据的整理与表达大多数是通过分类实现的,因此,2022年版课标进一步强化了数据分类的学习,并且与2017年版高中课标配合,形成了一个逐渐深化的课程结构。例如:第一学段,学习具体物的分类,如扣子的分类(例38逐层分类^①),引导学生知道分类要制定标准,要根据标准进行分类;第二学段,学习抽象数据的分类,如调查研究结果的分类(例39调查研究),启发学生感悟如何根据统计分析的目的制定标准;第三学段,学习对随机数据进行分类,如跳绳成绩的分类(例46确定五年级学生跳绳达标线),引发学生理解为什么可以利用百分数对随机现象进行决策;第四阶段即初中阶段,学习用数学的方法进行分类,如各省人均GDP的分类(例85数据分组的原则),帮助学生初步掌握分析日常生活中随机现象的统计方法,感悟结果或然成立的数学方法及其意义;第五阶段即高中阶段,学习如何通过分类进行随机决策,如为某一个城市设计阶梯电价(案例14阶梯电价的

^① 义教阶段的四个例子包括标号,均取自2022年版课标;第五个例子包括标号,取自2017年版高中课标。

设计),帮助学生初步掌握分析日常生活中随机现象的统计思想,知道在一般情况下,结果或然的随机决策没有对错之分、只有好坏之分。

本文尝试从上述几个方面梳理了新中国成立以来特别是21世纪以来我国小学数学课程目标、课程结构以及课程内容(概念与方法)表达等方面的变化与特征,希望引起关注和思考,促进基础教育课程研究和教学实践,并且为未来课程标准的修订提供参考。

参考文献:

- [1] 中学暂行规程(草案)[J]. 山西政报, 1952(7): 99-103.
- [2] 课程教材研究所. 20世纪中国中小学课程标准·教学大纲汇编: 数学卷[G]. 北京: 人民教育出版社, 2001.
- [3] 全日制中学暂行工作条例(试行草案)[J]. 安徽教育, 1978(12): 2.
- [4] 中华人民共和国教育部. 全日制义务教育数学课程标准(实验稿)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2001: 6.
- [5] 史宁中. 数学基本思想18讲[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2016.
- [6] 教育部基础教育课程教材专家工作委员会. 义务教育数学课程标准(2011年版)解读[M]. 北京: 北

京师范大学出版社, 2012: 2.

- [7] TYLER R W. 课程与教学的基本原理[M]. 罗康, 张阅, 译. 北京: 中国轻工业出版社, 2008.
- [8] 美国科学院国家研究理事会. 2025年的数学科学[M]. 刘小平, 李泽霞, 译. 北京: 科学出版社, 2014: 总序.
- [9] 巴桑卓玛. 中小学生对统计的认知水平研究[D]. 长春: 东北师范大学, 2006.
- [10] 刘鹏飞. 义务教育数学课程学段划分研究[D]. 长春: 东北师范大学, 2015: 134.
- [11] 赵莉, 吴正宪, 史宁中. 小学数学教学数的认识与运算一致性的研究与实践: 以“数与运算”总复习为例[J]. 课程·教材·教法, 2022(8): 122-129.
- [12] 史宁中. 核心素养统领的数学教育: 《义务教育数学课程标准(2022年版)》修订的理念与要点[J]. 小学教学(数学版), 2022(7/8): 10.
- [13] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [14] 马云鹏. 聚焦核心概念 落实核心素养: 《义务教育数学课程标准(2022年版)》内容结构化分析[J]. 课程·教材·教法, 2022(6): 36.
- [15] 史宁中, 曹一鸣. 义务教育数学课程标准(2022年版)解读[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 172.

(责任编辑: 王维花)

Construct a New Pattern of Mathematics Curriculum and Promote the High-Quality Development of Mathematics Education

Shi Ningzhong, Ma Yunpeng, Zhang Dan

Abstract: Since the founding of the People's Republic of China, mathematics education in the basic education stage has undergone continuous improvement and development, especially in the new century, the development of mathematics curriculum has been constantly reformed and innovated. Curriculum objective, curriculum structure, and expression of concept and method are the core elements of mathematics curriculum and even the basic education curriculum reform. The development trend of mathematics curriculum in the past 20 years, especially in primary school, can be summarized as follows. Curriculum objective is becoming more concrete, from “double bases” and three major abilities to “four bases”, and then to the “three skills” of core competency, which highlights people-oriented educational concept. Curriculum structure is becoming clearer from scattered and single learning theme to the setting of four learning domains, and then to seven themes integrated under the domains, which reflects the integration of knowledge structure and competency. The expression of concept and method is becoming more scientific and the expression of mathematics textbook regards learning theme as clue, paying more attention to students' knowledge and understanding of the essence of mathematics. The new pattern of mathematics curriculum promotes the improvement of mathematics practice and promotes the high-quality development of mathematics education.

Key words: mathematics curriculum; curriculum objective; curriculum structure; mathematics concept and method